DS de Mathématiques n° 3 - Corrigé

Exercice 1 : *Calculer les intégrales suivantes :*

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3}{t^2-4t+5}\,\mathrm{d}t$.

On effectue la division euclidienne de t^3 par t^2-4t+5 :

$$\frac{t^3}{t^2-4t+5} = t+4+\frac{11t-20}{t^2-4t+5} = t+4+\frac{11(t-2)}{(t-2)^2+1}+\frac{2}{(t-2)^2+1}.$$

Le dénominateur s'écrit $t^2-4t+5=(t-2)^2+1$ et a pour racines complexes conjuguées $2\pm i$.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^3}{t^2-4t+5}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}+4t+\frac{11}{2}\ln\big((t-2)^2+1\big)+2\arctan(t-2)\right]_1^2\\ &= 10-\left(\frac{9}{2}+\frac{11}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{11}{2}(1-\ln 2)+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$ *avec le changement de variable* $u=e^t$.

On pose $\begin{cases} u=e^t,\\ \mathrm{d}u=e^t\,\mathrm{d}t.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\ln u,\\ \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}.\end{cases}$ Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t} &= \int_0^x \frac{2}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^{e^x} \frac{2}{u+1/u}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\\ &= \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &= [2\arctan(u)]_1^{e^x}\\ &= 2\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ *avec le changement de variable* $u=\tan\theta$.

On pose $\begin{cases} u=\tan\theta,\\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta=\arctan u,\\ \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.\end{cases}$ Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^1 \frac{u}{1+u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= \int_0^1 \frac{u}{(1+u)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On effectue la décomposition en éléments simples :

$$\frac{u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{A}{u+1}+\frac{Bu}{1+u^2}+\frac{C}{1+u^2}.$$

On trouve le système

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+C=1, \\ A+C=0, \end{cases}$$

qui donne $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}$ et $C=\dfrac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u}{(1+u)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= -\frac{1}{2}[\ln(u+1)]_0^1 + \frac{1}{4}[\ln(1+u^2)]_0^1 + \frac{1}{2}[\arctan(u)]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : *Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :*

a) $\begin{cases} (1-t^2)y'(t)+(1+t^2)y(t)=e^t, \quad t\in]-1,1[, \\ y(0)=1. \end{cases}$

On écrit $y'(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}y(t)-\dfrac{e^t}{t^2-1}$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient non constant $a(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, et de second membre $b(t)=-\dfrac{e^t}{t^2-1}$, lui aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

On se place sur l'intervalle $I=]-1,1[$, qui contient le point initial $t_0=0$.

On a $a(t)=1+\dfrac{2}{t^2-1}=1+\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}$.

Donc $A(t)=t+\ln|t-1|-\ln|t+1|=t+\ln\dfrac{1-t}{1+t}$ est une primitive de $a(t)$ sur I.

Ainsi, $y_H(t)=\lambda e^{A(t)}=\lambda e^t\dfrac{1-t}{1+t}$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

Avec la méthode de Lagrange, on recherche une solution particulière de la forme

$$\begin{aligned} y_p(t) &= K(t)e^t\frac{1-t}{1+t}, \\ y_p'(t) &= K'(t)e^t\frac{1-t}{1+t}+K(t)e^t\frac{1-t}{1+t}-2K(t)e^t\frac{1}{(1+t)^2}.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} e^t &= (1-t^2)y_p'(t)+(1+t^2)y_p(t) \\ &= (1-t^2)K'(t)e^t\frac{1-t}{1+t}+(1-t^2)K(t)e^t\frac{(1-t)(1+t)-2}{(1+t)^2}+(1+t^2)K(t)e^t\frac{1-t}{1+t} \\ &= (1-t)^2K'(t)e^t+K(t)e^t\frac{(1-t^2)(1-t^2-2)+(1+t^2)(1-t)(1+t)}{(1+t)^2} \\ &= (1-t)^2K'(t)e^t.\end{aligned}$$

Donc $K'(t)=\dfrac{1}{(t-1)^2}$, puis $K(t)=-\dfrac{1}{t-1}=\dfrac{1}{1-t}$.

Ainsi $y_p(t)=\dfrac{e^t}{1+t}$.

On cherche $\lambda\in\mathbb{R}$ pour que $y(t)=\lambda e^t\dfrac{1-t}{1+t}+\dfrac{e^t}{1+t}$ vérifie $y(0)=1$.

Ainsi, $\lambda+1=1$, donc $\lambda=0$.

La solution du problème de Cauchy sur I est donc $\boxed{y(t)=\dfrac{e^t}{1+t}}$.

b) $\begin{cases} y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\sin(t), \quad t\in\mathbb{R}, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

C'est une EDL2 à coefficients constants avec second membre $\sin(t)=\mathrm{Im}(e^{it})$.
Le polynôme caractéristique est $X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$. Donc les solutions homogènes sont $y_h(t)=\lambda_1 e^{-t}+\lambda_2 e^{-2t}$ pour $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.
On recherche une solution de $y_1''(t)+3y_1'(t)+2y_1(t)=e^{it}$ de la forme

$$\begin{aligned} y_1(t)&=ae^{it}, \\ y_1'(t)&=iae^{it}, \\ y_1''(t)&=-ae^{it}. \end{aligned}$$

On a $e^{it}=(-a+3ia+2a)e^{it}$.
Donc $a(1+3i)=1$, puis $a=\dfrac{1}{1+3i}=\dfrac{1-3i}{10}$.
Donc

$$\begin{aligned} y(t)&=\lambda_1 e^{-t}+\lambda_2 e^{-2t}+\mathrm{Im}\left(\frac{1-3i}{10}(\cos t+i\sin t)\right) \\ &=\lambda_1 e^{-t}+\lambda_2 e^{-2t}-\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t, \end{aligned}$$

puis

$$y'(t)=-\lambda_1 e^{-t}-2\lambda_2 e^{-2t}+\frac{3}{10}\sin t+\frac{1}{10}\cos t.$$

Donc les conditions $y(0)=y'(0)=0$ donnent

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-\dfrac{3}{10}=0, \\ -\lambda_1-2\lambda_2+\dfrac{1}{10}=0. \end{cases}$$

On résout ce système et on obtient $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ et $\lambda_2=-\dfrac{1}{5}$.
Donc $\boxed{y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{5}e^{-2t}-\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t}$.

Problème I : *On considère* $f(x)=\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\right)$ *lorsque cela est possible.*

1. *Calculer* $f(n\pi)$ *pour* $n\in\mathbb{Z}$ *en fonction de la parité de* n.
   Soit $n\in\mathbb{Z}$. On a $\cos(n\pi)=(-1)^n$.
   Si n est pair alors $f(n\pi)=\mathrm{Arccos}\,(0)=\dfrac{\pi}{2}$.
   Si n est impair alors $f(n\pi)=\mathrm{Arccos}\,(1)=0$.
2. *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique et paire.*
   La fonction $x\mapsto\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$.
   La fonction $y\mapsto\sqrt{(1-y)/2}$ est continue sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,1]$.
   La fonction $z\mapsto\mathrm{Arccos}\,(z)$ est continue sur $[0,1]$.
   Donc la composée est bien continue sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x\in\mathbb{R}$.
   On a $f(x+2\pi)=\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x+2\pi)}{2}}\right)$
   $=\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\right)$ car $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$
   $=f(x)$. Donc f est 2π-périodique.

Puis $f(-x) = \text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(-x)}{2}}\right)$

$= \text{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\right)$ car $\cos(-x) = \cos(x)$

$= f(x)$. Donc f est paire.

3. *Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.*

   La fonction $y \mapsto \sqrt{(1-y)/2}$ est continue mais n'est pas dérivable en $y = 1$. Ce point est atteint pour $y = \cos x = 1$, soit $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
   La fonction $z \mapsto \text{Arccos}\,(z)$ est continue mais n'est pas dérivable en $z = 1$. Or $z = \sqrt{(1-y)/2} = 1$ lorsque $y = -1$, soit lorsque $x \in (2\mathbb{Z}+1)\pi$.
   Ainsi, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Pour $|h| < \pi$, on a $f(2k\pi + h) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|h|}{2}$ et $f((2k+1)\pi + h) = \dfrac{|h|}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; ces expressions montrent que f n'est pas dérivable aux points de $\pi\mathbb{Z}$.
   Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

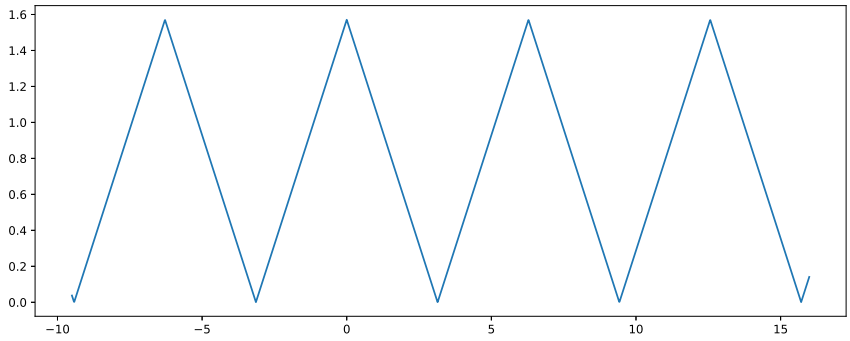
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{(1-\cos x)/2}} \times \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{(1-\cos x)/2})^2}} \\ &= -\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}} \\ &= -\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{\sin x}{2|\sin x|} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } \sin x > 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \sin x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4. *Montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|x|}{2}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.*

   Sur l'intervalle $]0, \pi[$, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ car $|\sin x| = \sin x > 0$.
   Donc on obtient $f(x) = \dfrac{-x}{2} + C$ en intégrant.
   La continuité de f en 0 donne $C = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après la question a).
   Sur le domaine $]-\pi, 0[$, on peut utiliser la parité de f.
   Ainsi, pour $0 < x < \pi$, $f(-x) = f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|-x|}{2}$.
   Donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|x|}{2}$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

5. *Tracer le graphe de $y = f(x)$ pour $x \in [-3\pi, 5\pi]$.*

   La périodicité de la fonction permet de tracer son graphe à partir de son allure sur $[-\pi, \pi]$, qui est un intervalle de longueur égale à une période.



Problème II : *On considère le problème de Cauchy*

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} (\mathcal{E}) : y^{(3)}(t) - y(t) = \sin(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 4. \end{cases}$$

On considère également l'équation différentielle

$$(\mathcal{R}) : z''(t) + 3z'(t) + 3z(t) = e^{-t}\sin(t).$$

1. *Montrer qu'il existe un unique réel $r \in \mathbb{R}$ tel que $y_h(t) = e^{rt}$ soit une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$. Déterminer r.*

   On teste $y_h(t) = e^{rt}$ dans l'équation homogène. On a $y_h^{(3)}(t) = r^3 e^{rt}$. Donc $y_h^{(3)} - y_h = 0 \Leftrightarrow r^3 = 1 \Leftrightarrow r \in \mathbb{U}_3$.

   Donc $r = 1$ est l'unique solution réelle.

2. *On cherche les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y(t) = K(t)y_h(t)$, où K est de classe C^3. Montrer que y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si K' est solution de $(\mathcal{R})$.*

   Le produit $y = Ky_h$ est de classe C^3. D'après la formule de Leibniz, on a

   $$y^{(3)} = K^{(3)}y_h + 3K^{(2)}y_h^{(1)} + 3K^{(1)}y_h^{(2)} + Ky_h^{(3)} = \left(K^{(3)} + 3K'' + 3K' + K\right) y_h$$

   Ainsi,

   $$\begin{aligned} \sin(t) &= y^{(3)}(t) - y(t) \\ &= \left(K^{(3)}(t) + 3K''(t) + 3K'(t) + K(t)\right) e^t - K(t)e^t \\ &= \left(K^{(3)}(t) + 3K''(t) + 3K'(t)\right) e^t. \end{aligned}$$

   Cela équivaut à $e^{-t}\sin(t) = K^{(3)}(t) + 3K''(t) + 3K'(t)$, c'est-à-dire que K' est solution de $(\mathcal{R})$.

3. *Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{R})$.*

   $(\mathcal{R})$ est une EDL2 à coefficients constants et second membre $b(t) = e^{-t}\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{(-1+i)t})$. Son polynôme caractéristique est $X^2 + 3X + 3$ qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$. Ses racines sont $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Donc les solutions de l'équation homogène sont $z_h(t) = e^{-\frac{3}{2}t}(A\cos(\sqrt{3}t/2) + B\sin(\sqrt{3}t/2))$ pour $A, B \in \mathbb{R}$.

   On recherche une solution de $z_1'' + 3z_1' + 3z_1 = e^{(-1+i)t}$ de la forme $z_1(t) = ae^{(-1+i)t}$ avec $a \in \mathbb{C}$. On a $z_1'(t) = a(-1+i)e^{(-1+i)t}$ et $z_1''(t) = a(-1+i)^2 e^{(-1+i)t} = -2iae^{(-1+i)t}$. Donc $e^{(-1+i)t} = z_1'' + 3z_1' + 3z_1 = a(-2i + 3(-1+i) + 3)e^{(-1+i)t} = aie^{(-1+i)t}$. Donc $a = \dfrac{1}{i} = -i$. Ainsi $\mathrm{Im}(z_1(t)) = \mathrm{Im}(-ie^{(-1+i)t}) = e^{-t}\mathrm{Im}(-i(\cos t + i\sin t)) = -e^{-t}\cos t$.

   Donc $\boxed{z(t) = e^{-3t/2}(A\cos(\sqrt{3}t/2) + B\sin(\sqrt{3}t/2)) - e^{-t}\cos t}$.

4. *Montrer que* $K(0)=1$, $K'(0)=2$ *et* $K''(0)=-1$.
   On a $K(t)=y(t)/y_h(t)=y(t)e^{-t}$. Donc $K(0)=y(0)e^0=1$.
   Puis $K'(t)=(y'(t)-y(t))e^{-t}$. Donc $K'(0)=(y'(0)-y(0))e^0=3-1=2$.
   Et enfin $K''(t)=(y''(t)-2y'(t)+y(t))e^{-t}$. Donc $K''(0)=(y''(0)-2y'(0)+y(0))e^0=4-6+1=-1$.
5. *En déduire* $K'(t)$.
   On sait que K' est solution de $(\mathcal{R})$. Donc

$$K'(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)-e^{-t}\cos t.$$

   On a $K'(0)=A-1=2$, donc $A=3$.
   Puis

$$K''(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\left(-\frac{3}{2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)+e^{-t}(\cos t+\sin t).$$

   On a $K''(0)=-\frac{3}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B+1=-1$, donc, en remplaçant A par 3, on obtient $B=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.
   Donc $\boxed{K'(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\left(3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)-e^{-t}\cos t}$.
6. *Résoudre le problème de Cauchy* $(\mathcal{C})$.
   Il reste à primitiver K' pour obtenir K et à utiliser $K(0)=1$.
   On peut démontrer qu'une primitive de $e^{at}\cos(bt)$ est $\frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\cos(bt)+b\sin(bt))$ et qu'une primitive de $e^{at}\sin(bt)$ est $\frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin(bt)-b\cos(bt))$, en passant au complexe.
   Donc une primitive de K' est

$$K(t)=e^{-\frac{3}{2}t}\left(-\frac{7}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)+\frac{e^{-t}}{2}(\cos t-\sin t)+C.$$

   On utilise $K(0)=1$ pour déterminer C. On a $K(0)=-\frac{7}{3}+\frac{1}{2}+C=1$, donc $C=\frac{17}{6}$.
   Donc $\boxed{y(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{7}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)+\frac{17}{6}e^t}$.