Concours Blanc PCSI1 2024

Exercice 1 : Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note E le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et F le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. (on ne demande pas de justifier qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).
Soit $\Psi : F \longrightarrow E \qquad f \longmapsto f' - f$.
Soit $\Phi : E \longrightarrow F \qquad f \longmapsto \Phi(f)$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(f)(x) = e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

1a Justifier que $\Phi(f) \in F$.

1b Montrer que Ψ est une application linéaire.

1c Déterminer $\ker(\Psi)$.

2a Montrer que Φ est une application linéaire.

2b Montrer que $\ker(\Phi)$ se réduit à la fonction nulle.

2c Montrer que $\operatorname{Im}(\Phi) = \{g \in F \ / \ g(0) = 0\}$.(attention à bien distinguer les deux inclusions).

3 Montrer que $F = \ker(\Psi) \oplus \operatorname{Im}(\Phi)$.

4 Déterminer $\Psi \circ \Phi$, et montrer que $\Psi \circ \Phi$ est un automorphisme de E.

Problème 1 :

Partie A :

A1 Soit x un réel positif ou nul. On note ϕ_x la fonction définie par : $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\phi_x(t) = (\sin(t))^x$

A1a Montrer que la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

A1b Montrer que la fonction ϕ_x est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est toujours notée ϕ_x.

A1c Montrer que si $x \geq 1$, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On définit une fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_x(t)dt$, que l'on notera abusivement $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt$.

A2 Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq 0$.

A3 Démontrer la relation :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ (x+1)f(x+1) = xf(x-1).$$

Indication : on pourra intégrer par parties $f(x+1)$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$.

A4a Montrer que la fonction g est 1_périodique.

A4b Montrer que $g(n) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.

A5 Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

A5a En utilisant la question $A.2$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq (x+n+1)f(n+1)f(n+2) \leq g(x+n) \leq (x+n+1)f(n)f(n+1).$$

A5b En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{\pi}{2}\frac{n+x+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}\frac{n+x+1}{n+1}.$$

A5c Démontrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

A6 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

A7a Montrer l'encadrement $\forall x \in [1, +\infty[\,,\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2(x+1)}} \leq f(x) \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

A7b En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et plus précisément, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B : Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$.

B1 Montrer que les suites $(S_{2p)_{p\in\mathbb{N}}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit ϕ la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\phi(t) = \dfrac{1}{1+\sin(t)}$. On note I l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)dt$.

B2 Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}$. En déduire le calcul de l'intégrale I.

Pour tout entier naturel n, on note $D_n = I - S_n$.

B3 Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$D_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(t))^{n+1}}{1+\sin(t)} dt$$

B4 En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0$.

B5 En déduire enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Problème 2 : Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et φ un endomorphisme de E.

On rappelle qu'on pose $\varphi^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\varphi^{k+1} = \varphi^k \circ \varphi$.

On dit que l'endomorphisme φ est **cyclique** s'il existe un vecteur $\vec{u}_0 \in E$ tel que la famille

$$\left(\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0)\right)$$

soit une base de E.

Partie 1 : Exemples

1 : Exemple 1 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on pose $\vec{u}_0 = (2, 3)$.

1a Calculer $\varphi(\vec{u}_0)$, montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0))$ est une base de E. Conclusion ?

1b Calculer $\varphi^2(\vec{u}_0)$ et déterminer les coordonnées de $\varphi^2(\vec{u}_0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

1c En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

1d Déterminer un vecteur $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ dans le noyau de $\varphi - 2Id_E$. La famille $(\vec{u}_1, \varphi(\vec{u}_1))$ est-elle une base de E ?

2 : Exemple 2 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2a Montrer que φ est un automorphisme de E (c'est-à dire bijectif).

2b Montrer que $\varphi^2 = \alpha\varphi + \beta Id_E$ pour des réels α et β à déterminer.

2c En déduire que φ n'est pas cyclique.

3 : Exemple 3 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

3a Soit $k \in [|0, n-1|]$, calculer $\varphi^k(X^{n-1})$.

3b En déduire que φ est cyclique.

4 : Exemple 4 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

4a Soit $P \in E$. Calculer $\deg(\varphi(P))$ en fonction de $\deg(P)$.

4bi Déterminer le noyau de φ.

4bii Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

4biii En déduire $\operatorname{Im}(\varphi)$.

4c L'endomorphisme φ est-il cyclique ?

Partie 2 : Cas général

5 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme nilpotent soit cyclique. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose φ **nilpotent d'indice** $p \in \mathbb{N}^*$ c'est-à dire :

$$\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

5a Montrer qu'il existe $\vec{u}_0 \in E$ tel que $\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) \neq \vec{0}$.

5b Montrer que la famille $(\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{p-1}(\vec{u}_0))$ est libre. Comparer p et n.

5c Montrer que φ est cyclique si et seulement si $p = n$.

6 : Quelques résultats généraux sur les endomorphismes cycliques. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $\vec{u}_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0))$ soit une base de E.

6a Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\varphi^n(\vec{u}_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{u}_0).$$

6b Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ en fonction de $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

6c Montrer que la famille $(Id_E, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. Est-ce une base de $\mathcal{L}(E)$?

6d Montrer pour tout vecteur $\vec{w} \in \{\varphi^j(\vec{u}_0) \ / \ j \in [|0, n-1|]\}$:

$$\varphi^n(\vec{w}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{w}).$$

En déduire l'égalité :

$$\varphi^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k.$$

6e Montrer que φ est un automorphisme si et seulement si $a_0 \neq 0$.

6f Supposons $a_0 = 0$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice plus difficile : Soient n un entier naturel et α un nombre complexe. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ en posant :

$$A_0 = 1 \text{ et } k \in [|1,n|]\,,\ A_k = \frac{1}{k!} X\,(X - ka)^{k-1}$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

0 Soit $y \in \mathbb{C}$ et $Q(X) = (X+y)^n$. Pour $j \in [|0,n|]$, exprimer simplement $Q^{(j)}(X)$

1 Montrer que la famille $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2 Montrer que pour tout $k \in [|1,n|]$, $A_k'(X) = A_{k-1}(X-a)$

3 En déduire pour $j,k \in [|0,n|]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j<k$, $j=k$ ou $j>k$.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$

4 Montrer que pour tout $j \in [|0,n|]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

5 En déduire l'identité binômiale d'Abel :

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{C}^3,\ \ (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x\,(x-ka)^{k-1}\,(y+ka)^{n-k}$$

6 Etablir la relation :

$$\forall (a,y) \in \mathbb{C}^2,\ ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}\,(y+ka)^{n-k}$$

Corrigé de l'exercice 1 : Soit $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note E le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et F le sous-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. (on ne demande pas de justifier qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

Soit $\Psi : F \longrightarrow E \quad f \longmapsto f' - f$.

Soit $\Phi : E \longrightarrow F \quad f \longmapsto \Phi(f)$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(f)(x) = e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

1a Justifier que $\Phi(f) \in F$.

$f \in E$ donc f est continue donc $x \mapsto \int\limits_0^x f(t)\,dt$ est dérivable de dérivée f continue donc est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ donc $\Phi(f)$ aussi donc $\Phi(f) \in F$.

1b Montrer que Ψ est une application linéaire.

$\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda f + \mu g - (\lambda f + \mu g)' = \lambda(f - f') + \mu(g - g') = \lambda\Psi(f) + \mu\Psi(g)$ donc Ψ est linéaire.

1c Déterminer $\ker(\Psi)$.

$f \in \ker(\Psi) \Leftrightarrow f = f' \Leftrightarrow f = \lambda \exp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $\ker(\Psi)$ est la droite vectorielle constituée des fonctions de la forme $\lambda \exp, .\lambda \in \mathbb{R}$.

2a Montrer que Φ est une application linéaire.

Pour tout x, $\Phi(\lambda f + \mu g)(x) = e^x \int\limits_0^x (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt + \mu e^x \int\limits_0^x g(t)\,dt = \lambda\Phi(f)(x) + \mu\Phi(g)(x)$ donc $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$ donc Φ est une application linéaire.

2b Montrer que $\ker(\Phi)$ se réduit à la fonction nulle.

Si $f \in \ker(\Phi)$, alors $\int\limits_0^x f(t)\,dt = 0$ pour tout x, donc la dérivée est nulle, c'est-à dire f est nulle. Ainsi, $\ker(\Phi)$ se réduit à la fonction nulle.

2c Montrer que $\operatorname{Im}(\Phi) = \{g \in F \ / \ g(0) = 0\}$.(attention à bien distinguer les deux inclusions).

Soit $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$. Alors il existe f telle que $g(x) = \Phi(f)(x) = e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Donc $g(0) = \int\limits_0^0 f(t)\,dt = 0$.

Réciproquement soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$. Posons $f(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x))$.
Alors f est continue et $\Phi(f)(x) = e^x \int\limits_0^x (e^{-t}(g'(t) - g(t)))\,dt = e^x \left[e^{-t}g(t)\right]_0^x = e^x e^{-x} g(x) - 0 = g(x)$ donc $\Phi(f) = g$ donc $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$.

Ainsi, $\operatorname{Im}(\Phi) = \{g \in F \ / \ g(0) = 0\}$

3 Montrer que $F = \ker(\Psi) \oplus \operatorname{Im}(\Phi)$.

Si $g \in \ker(\Psi) \cap \operatorname{Im}(\Phi)$, alors $g(x) = \lambda e^x$ et $g(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ donc g est nulle. Donc $\ker(\Psi) \cap \operatorname{Im}(\Phi) = \{0_F\}$.

De plus, si $f \in F$, alors posons $g(x) = f(x) - f(0)e^x$. Alors $g \in F$ et $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ donc $g \in \operatorname{Im}(\Phi)$. Ainsi, $f = g + \lambda \exp$ donc $f \in \operatorname{Im}(\Phi) + \ker(\Psi)$.

Donc $\operatorname{Im}(\Phi) + \ker(\Psi) = F$. Donc $F = \ker(\Psi) \oplus \operatorname{Im}(\Phi)$.

4 Déterminer $\Psi \circ \Phi$, et montrer que $\Psi \circ \Phi$ est un automorphisme de E.

Pour tout x, $(\Psi \circ \Phi)(f)(x) = \Psi\left(e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt\right) = e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt + e^x f(x) - e^x \int\limits_0^x f(t)\,dt = e^x f(x)$.

$\Psi \circ \Phi$ est bijective car pour $f, g \in E$, $(\Psi \circ \Phi)(f) = g \Leftrightarrow g = \exp f \Leftrightarrow f = \dfrac{1}{\exp} g$, qui est donc l'unique antécédent de g.
Donc $\Psi \circ \Phi$ est un automorphisme de E.

Corrigé du problème 1 :

Partie A :

A1 Soit x un réel positif ou nul. On note ϕ_x la fonction définie par : $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\phi_x(t) = (\sin(t))^x$

A1a Montrer que la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
$\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\phi_x(t) = e^{x\ln(\sin(t))}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sin(t) > 0$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

A1b Montrer que la fonction ϕ_x est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est toujours notée ϕ_x.
$\lim\limits_{t \to 0^+} \ln(\sin(t)) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \phi_x(t) = 0$ sauf si $x = 0$, donc pour $x \neq 0$, on peut prolonger ϕ_x par continuité en 0 en posant $\phi_x(0) = 0$.
Pour $x = 0$, $\phi_x(t)$ est constante égale à 1 donc on pose $\phi_x(0) = 1$.

A1c Montrer que si $x \geq 1$, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Pour $x \geq 1$, on a $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\phi_x'(t) = x\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}\phi_x(t) = x\cos(t)(\sin(t))^{x-1} = x\cos(t)\phi_{x-1}(t)$ donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \phi_x'(t) = x\phi_{x-1}(0) \in \mathbb{R}$.
De plus, ϕ_x est continue en 0 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On définit une fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_x(t)dt$, que l'on notera abusivement $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x dt$.

A2 Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq 0$.
Soient x, x' deux réels tels que $0 \leq x \leq x'$, alors pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $0 \leq (\sin(t))^{x'} \leq (\sin(t))^x$ car $0 < \sin(t) \leq 1$, donc $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \phi_{x'}(t) \leq \phi_x(t)$ et :

$$0 \leq f(x') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_{x'}(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_x(t)dt = f(x)$$

donc f est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$.

A3 Démontrer la relation :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ (x+1)f(x+1) = xf(x-1).$$

Indication : on pourra intégrer par parties $f(x+1)$.
Pour $x \geq 1$, la fonction $\phi_x : t \longmapsto (\sin(t))^x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x \sin(t) dt \\ &= [-(\cos(t))(\sin(t))^x]_0^{\pi/2} + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x-1} \cos^2(t) dt \\ &= x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x-1} \left(1 - \sin^2(t)\right) dt \\ &= x \left(f(x-1) - f(x+1)\right). \end{aligned}$$

On en déduit la relation $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$ pour tout $x \geq 1$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$.

A4a Montrer que la fonction g est 1_périodique.
Pour $x \geq 0$, on a $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$, donc

$$g(x+1) = (x+2)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x)f(x+1) = g(x)$$

donc la fonction g est 1_périodique.

A4b Montrer que $g(n) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.
On en déduit $g(n) = g(n-1) = g(n-2) = \cdots = g(1) = g(0) = f(0)f(1)$.
Or $f(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $f(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = 1$ donc pour tout entier naturel n, $g(n) = \dfrac{\pi}{2}$.

A5 Soit $x \in [0,1]$ fixé.

A5a En utilisant la question $A.2$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq (x+n+1)f(n+1)f(n+2) \leq g(x+n) \leq (x+n+1)f(n)f(n+1).$$

On a :

$$g(x+n) = (x+n+1)f(x+n)f(x+n+1) \leq (x+n+1)f(n)f(n+1)$$

en utilisant la décroissance de f et le fait que tous les facteurs sont positifs.
De même,

$$g(x+n) = (x+n+1)f(x+n)f(x+n+1) \geq (x+n+1)f(n+1)f(n+2) \geq 0$$

car $x \leq 1$.

A5b En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{\pi}{2}\frac{n+x+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}\frac{n+x+1}{n+1}.$$

C'est le même encadrement qu'à la question précédente car $g(x+n) = g(n)$ et $f(n)f(n+1) = \dfrac{g(n)}{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ et en décalant l'indice n, $f(n+1)f(n+2) = \dfrac{\pi}{2(n+2)}$.

A5c Démontrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'encadrement $\dfrac{\pi}{2} \leq g(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$. On a ainsi prouvé que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

A6 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction g est 1_périodique et, sur l'intervalle $[0,1]$, elle est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$. Donc $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

A7a Montrer l'encadrement $\forall x \in [1,+\infty[$, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(x+1)}} \leq f(x) \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

De la décroissance de f, on déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$(f(x))^2 \geq f(x)f(x+1) = \frac{g(x)}{x+1} = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

De même, si $x \geq 1$, on a :

$$(f(x))^2 \leq f(x-1)f(x) = \frac{g(x-1)}{x} = \frac{\pi}{2x}.$$

Comme $f(x) \geq 0$, on a donc pour $x \geq 1$, l'encadrement $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(x+1)}} \leq f(x) \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

A7b En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et plus précisément, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Le théorème d'encadrement donne immédiatement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Plus précisément, on a : $x+1 \sim_{+\infty} x$ donc $\sqrt{x+1} \sim_{+\infty} \sqrt{x}$. Et d'autre part, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{f(x)}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}} \leq 1$ donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}} = 1$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

Partie B : Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$.

B1 Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par commodité, posons $u_p = S_{2p}$ et $v_p = S_{2p+1}$. On a :

$$u_{p+1} - u_p = S_{2p+2} - S_{2p} = -f(2p+1) + f(2p+2) \leq 0$$

car f est décroissante, donc la suite (u_p) est décroissante.
De même, $v_{p+1} - v_p = S_{2p+3} - S_{2p+1} = f(2p+2) - f(2p+3) \geq 0$ donc la suite (v_p) est croissante.
Enfin, $v_p - u_p = S_{2p+1} - S_{2p} = -f(2p+1)$, de limite nulle quand p tend vers $+\infty$.
Les suites (u_p) et (v_p) sont donc adjacentes.
Elles admettent donc la même limite l. Or ce sont les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de (S_n) donc la suite (S_n) converge vers l.

Soit ϕ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\phi(t) = \frac{1}{1+\sin(t)}$. On note I l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)dt$.

B2 Montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}$. En déduire le calcul de l'intégrale I.

Posons $t = \frac{\pi}{2} - u$. On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\cos(u)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Donc $I = \left[\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = 1$.

Pour tout entier naturel n, on note $D_n = I - S_n$.

B3 Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$D_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(t))^{n+1}}{1+\sin(t)}dt$$

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin^k(t) = \frac{1-(-1)^{n+1}\sin^{n+1}(t)}{1+\sin(t)}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $-\sin(t) \neq 1$).

Donc on a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{1}{1+\sin(t)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin^k(t) = (-1)^{n+1} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1+\sin(t)}$$

En intégrant cette relation sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $D_n = I - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1+\sin(t)}dt$.

B4 En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0$.

Comme $\sin(t) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on majore la valeur absolue de cette dernière intégrale :

$$|D_n| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1+\sin(t)}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt = f(n+1).$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$, il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0$

B5 En déduire enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

On a $S_n = I - D_n = 1 - D_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

Problème 2 : Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et φ un endomorphisme de E.

On rappelle qu'on pose $\varphi^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\varphi^{k+1} = \varphi^k \circ \varphi$.

On dit que l'endomorphisme φ est cyclique s'il existe un vecteur $\vec{u}_0 \in E$ tel que la famille

$$\left(\vec{u}_0, \varphi\left(\vec{u}_0\right), \varphi^2\left(\vec{u}_0\right), \ldots, \varphi^{n-1}\left(\vec{u}_0\right)\right)$$

soit une base de E.

Partie 1 : Exemples

1 : Exemple 1 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on pose $\vec{u}_0 = (2, 3)$.

1a Calculer $\varphi(\vec{u}_0)$, montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0))$ est une base de E. Conclusion ?

On a $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\varphi(\vec{u}_0) = (-10, -1)$.

On a $\det \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -2 + 30 = 28 \neq 0$ donc $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0))$ est une base de E. Donc φ est cyclique.

1b Calculer $\varphi^2(\vec{u}_0)$ et déterminer les coordonnées de $\varphi^2(\vec{u}_0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

On a $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $\varphi^2(\vec{u}_0) = (-34, -9)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi^2(\vec{u}_0) &= \lambda \vec{u}_0 + \mu\varphi(\vec{u}_0) \Leftrightarrow (-34, -9) = \lambda(2, 3) + \mu(-10, -1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\lambda - 10\mu = -34 \\ 3\lambda - \mu = -9 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} -28\mu = -84 & 3L_1 - 2L_2 \\ 2\lambda - 10\mu = -34 & L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = -2 \\ \mu = 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

donc $\varphi^2(\vec{u}_0) = -2\vec{u}_0 + 3\varphi(\vec{u}_0)$.

1c En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

On a $\left\{ \begin{array}{c} \varphi(\vec{u}_0) = 0\vec{u}_0 + 1\varphi(\vec{u}_0) \\ \varphi^2(\vec{u}_0) = -2\vec{u}_0 + 3\varphi(\vec{u}_0) \end{array} \right.$ donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1d Déterminer un vecteur $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ dans le noyau de $\varphi - 2Id_E$. La famille $(\vec{u}_1, \varphi(\vec{u}_1))$ est-elle une base de E ?

Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} &\in \ker(\varphi - 2Id_E) \Leftrightarrow (A - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x - 3y = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = y(3, 1) \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}_1 = (3, 1) \in \ker(\varphi - 2Id_E) \setminus \left\{\vec{0}\right\}$.

Puisque $(\varphi - 2Id_E)(\vec{u}_1) = \vec{0}$ on a $\varphi(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1$ donc $\vec{u}_1$ et $\varphi(\vec{u}_1)$ sont colinéaires donc $(\vec{u}_1, \varphi(\vec{u}_1))$ n'est pas une base de E.

2 : Exemple 2 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2a Montrer que φ est un automorphisme de E (c'est-à dire bijectif).

On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4 + 6) = 4 \neq 0$$

donc A est inversible, φ est bijective et est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2b Montrer que $\varphi^2 = \alpha\varphi + \beta Id_E$ pour des réels α et β à déterminer.

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -18 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 3A - 2I_3$. Donc $\varphi^2 = 3\varphi - 2Id_{E.}$

2c En déduire que φ n'est pas cyclique.

Pour tout $\vec{u} \in E$, on a $\varphi^2(\vec{u}) = 3\vec{\varphi}(\vec{u}) - 2\vec{u}$ donc la famille $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \varphi^2(\vec{u}))$ est liée et n'est donc pas une base de E.

Donc φ n'est pas cyclique.

3 : Exemple 3 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

3a Soit $k \in [|0, n-1|]$, calculer $\varphi^k(X^{n-1})$.

On a :

$$\varphi^{(k)}\left(X^{n-1}\right) = \left(X^{n-1}\right)^{(k)} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}X^{n-1-k}$$

3b En déduire que φ est cyclique.

La famille $\left(\varphi^k\left(X^{n-1}\right)\right)_{0\leq k\leq n-1}$ est une famille de polynomes de degrés échelonnés de 0 à $n-1$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc φ est cyclique.

4 : Exemple 4 : On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

4a Soit $P \in E$. Calculer $\deg(\varphi(P))$ en fonction de $\deg(P)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ non nul. Posons $d = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec donc $a_d \neq 0$. On a :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right)$$

donc :

- $\deg(\varphi(P)) \leq d$
- le coefficient de X^d dans $\varphi(P)$ est $a_d - a_d = 0$.
- si $d \geq 1$, le coefficient de X^{d-1} dans $\varphi(P)$ est $da_d + a_{d-1} - a_{d-1} = da_d \neq 0$ donc $\deg(\varphi(P)) = d-1$.

  Ainsi :

$$\deg(\varphi(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 \text{ si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

4bi Déterminer le noyau de φ.

D'après la question précedente, pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \deg\varphi(P) = -\infty \Leftrightarrow \deg(P) \leq 0$$

donc $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$.

4bii Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

D'après $4a$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) - 1 \leq n-2$ donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

donc $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$. .

4biii En déduire $\operatorname{Im}(\varphi)$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X],) - \dim(\ker(\varphi)) = n-1 = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])$.

Or $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ donc $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

4c L'endomorphisme φ est-il cyclique ?

D'après $4a$, on a pour tout $k \in [|0, n-1|]$, $\deg\left(\varphi^k\left(X^{n-1}\right)\right) = n-1-k$.

La famille $(X^{n-1}, \varphi(X^{n-1}), \dots, \varphi^{n-1}(X^{n-1}))$ est donc une famille de polynomes de degrés échelonnés de $n-1$ à 0 donc est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc φ est cyclique.

Partie 2 : Cas général

5 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme nilpotent soit cyclique.

Soit $\varphi \in L(E)$. On suppose φ nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ c'est-à dire :

$$\varphi^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \varphi^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

5a Montrer qu'il existe $\vec{u}_0 \in E$ tel que $\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) \neq \vec{0}$.

Puisque φ^{p-1} n'est pas l'application nulle, il existe $\vec{u}_0 \in E$ tel que $\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) \neq \vec{0}$.

5b Montrer que la famille $(\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \dots, \varphi^{p-1}(\vec{u}_0))$ est libre. Comparer p et n.

Remarquons que pour tout entier $k \geq p$, on a $\varphi^k = \varphi^p \circ \varphi^{k-p} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ \varphi^{k-p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0\vec{u}_0 + \lambda_1\varphi(\vec{u}_0) + \dots + \lambda_{p-1}\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) = \vec{0}$.

En appliquant φ^{p-1} à cette relation il vient $\lambda_0\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) = \vec{0}$ donc $\lambda_0 = 0$.

Supposons par récurrence $\lambda_0 = \dots = \lambda_{i-1} = 0$ pour $i \leq p-1$.

La relation se réécrit alors $\lambda_i\varphi^i(\vec{u}_0) + \dots + \lambda_{p-1}\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) = \vec{0}$.

On applique cette fois φ^{p-1-i} pour obtenir $\lambda_i\varphi^{p-1}(\vec{u}_0) = \vec{0}$ donc $\lambda_i = 0$.

Pour $i = p-1$ on obtient alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ donc la famille $(\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \dots, \varphi^{p-1}(\vec{u}_0))$ est libre.

Comme c'est une famille libre de p vecteurs de E et $\dim(E) = n$, on a $p \leq n$.

5c Montrer que φ est cyclique si et seulement si $p = n$.

- ($\Leftarrow$) Supposons $p = n$. Alors la famille $(\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \dots, \varphi^{p-1}(\vec{u}_0))$ est libre et de cardinal $p = n = \dim(E)$ donc c'est une base de E.
  Donc φ est cyclique.
- ($\Rightarrow$) Supposons φ cyclique. Soit alors $\vec{v} \in E$ tel que $(\vec{v}, \varphi(\vec{v}), \dots, \varphi^{n-1}(\vec{v}))$ est une base de E. Il s'ensuit que $\varphi^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$ donc $\varphi^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $n-1 \leq p-1$ donc $n \leq p$.
  Or $p \leq n$ donc $p = n$.

6 : Quelques résultats généraux sur les endomorphismes cycliques. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $\vec{u}_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \dots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0))$ soit une base de E.

6a Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\varphi^n(\vec{u}_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{u}_0).$$

Puisque $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0))$, le vecteur $\varphi^n(\vec{u}_0)$ admet une unique décomposition comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base donc il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ uniques tels que $\varphi^n(\vec{u}_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{u}_0)$.

6b Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ en fonction de $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Cette relation donne la dernière colonne de la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)$ tandis que pour $1 \leq j \leq n-1$, $\varphi(\varphi^{j-1}(\vec{u}_0)) = \varphi^j(\vec{u}_0)$ donne la colonne j d'où :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

6c Montrer que la famille $(Id_E, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. Est-ce une base de $\mathcal{L}(E)$?

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ En évaluant en $\vec{u}_0$, on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi^k(\vec{u}_0) = \vec{0}$.

Puisque $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0))$ est libre, cela entraîne $\forall k \in [|0, n-1|]$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi, $(Id_E, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Mais cette famille est de cardinal n alors que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2 > n$ car $n \geq 2$ donc ce n'est pas une base de $\mathcal{L}(E)$.

6d Montrer pour tout vecteur $\vec{w} \in \{\varphi^j(\vec{u}_0) \ / \ j \in [|0, n-1|]\}$:

$$\varphi^n(\vec{w}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{w}).$$

Soit $j \in [|0, n-1|]$, et $\vec{w} = \varphi^j(\vec{u}_0)$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi^n(\vec{w}) &= \varphi^n\left(\varphi^j(\vec{u}_0)\right) = \varphi^{n+j}(\vec{u}_0) \\ &= \varphi^j(\varphi^n(\vec{u}_0)) = \varphi^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{u}_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^{j+k}(\vec{u}_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k\left(\varphi^j(\vec{u}_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k(\vec{w}) \end{aligned}$$

En déduire l'égalité :

$$\varphi^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k.$$

Puisque les applications linéaires φ^n et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k$ sont égales sur tous les éléments d'une base, elles sont égales partout et on a :

$$\varphi^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi^k$$

6e Montrer que φ est un automorphisme si et seulement si $a_0 \neq 0$.

- ($\Leftarrow$) Supposons $a_0 \neq 0$. Alors $\varphi^n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi^k + a_0 Id_E$ donc $\varphi^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi^k = a_0 Id_E$ donc :

$$\frac{1}{a_0}\left(\varphi^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi^{k-1}\right) \circ \varphi = Id_E$$

et

$$\varphi \circ \left(\frac{1}{a_0}\left(\varphi^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi^{k-1}\right)\right) = Id_E$$

donc d'après le théorème de caractérisation des bijections, φ est bijective donc est un automorphisme.(et $\varphi^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(\varphi^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi^{k-1}\right)$).

- ($\Rightarrow$) Supposons $a_0 = 0$. Alors la première ligne de la matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est nulle donc cette matrice n'est pas inversible donc φ n'est pas un automorphisme.
Par contraposée, si φ est un automorphsme, $a_0 \neq 0$.

6f Supposons $a_0 = 0$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
Puisque $a_0 \neq 0$, φ n'est pas bijective donc $rg(\varphi) < n = \dim(E)$.
Or $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0))$ est une base de E donc la famille $(\varphi(\vec{u}_0), \varphi^2(\vec{u}_0), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{u}_0)$ est libre comme sous-famille d'une famille libre. Or ces vecteurs sont tous dans $\mathrm{Im}(\varphi)$ qui contient ainsi une famille libre de $n-1$ vecteurs. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \geq n-1$. Donc :

$$rg(\varphi) = n - 1.$$

Corrigé de l'exercice plus difficile : Soient n un entier naturel et α un nombre complexe. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ en posant :

$$A_0 = 1 \text{ et } k \in [|1, n|], \; A_k = \frac{1}{k!} X (X - ka)^{k-1}$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

0 Soit $y \in \mathbb{C}$ et $Q(X) = (X+y)^n$. Pour $j \in [|0,n|]$, exprimer simplement $Q^{(j)}(X)$.

$Q(X) = (X+y)^n$. par récurrence bornée, il vient facilement que pour $j \in [|0,n|]$, $Q^{(j)}(X) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(X+y)^{n-j}$

1 Montrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

On a $\deg(A_k) = 1 + k - 1 = k$ pour k de 0 à n donc $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n.

2 Montrer que pour tout $k \in [|1,n|]$, $A'_k(X) = A_{k-1}(X-a)$

Soit $k \in [|1,n|]$:

$$\begin{aligned}
A'_k(X) &= \frac{1}{k!}(X-ka)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}X(X-ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!}(X-ka)^{k-2}(X-ka+kX-X) \\
&= \frac{k}{k!}(X-ka)^{k-2}(-a+X) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}(X-a)(X-(k-1+1)a)^{k-2} \\
&= A_{k-1}(X-a)
\end{aligned}$$

3 En déduire pour $j,k \in [|0,n|]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Par une récurrence immédiate, il résulte de 2 que pour $j \le k$, $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja)$ (ceci vaut aussi trivialement pour $j = 0$).

Donc si $j < k$:

$$\begin{aligned}
A_k^{(j)}(X) &= A_{k-j}(X-ja) = \frac{1}{(k-j)!}(X-ja)(X-ja-(k-j)a)^{k-j-1} \\
A_k^{(j)}(ja) &= \frac{1}{(k-j)!}\left(\underbrace{ja-ja}_{=0}\right)(ja-ja-(k-j)a)^{k-j-1} = 0
\end{aligned}$$

et si $j = k$:

$$\begin{aligned}
A_k^{(k)}(X) &= A_0(X-ka) = 1 \\
A_k^{(k)}(ka) &= 1
\end{aligned}$$

et si $j > k$, $A_k^{(k)} = 1$ donc $A_k^{(j)} = 0$ donc :

$$A_k^{(j)}(ja) = 0$$

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$

4 Montrer que pour tout $j \in [|0,n|]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

On a $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ donc pour tout $j \in [|0,n|]$, $P^{(j)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}$ donc :

$$\begin{aligned} P^{(j)}(ja) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) \\ &= a_j A_j^{(j)}(ja) \text{ d'après 3} \\ &= a_j \end{aligned}$$

5 En déduire l'identité binômiale d'Abel :

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{C}^3,\ \ (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Soit $y \in \mathbb{C}$ fixé et $P(X) = (X+y)^n$. rappelons de la question 0 que pour $j \in [|0,n|]$, $P^{(j)}(X) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(X+y)^{n-j}$ donc $P^{(j)}(ja) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(y+ja)^{n-j}$.
Or $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc il existe $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$$

et d'après 4, $a_k = P^{(k)}(ka) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k}$ donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k} A_k(X)$ donc :

$$\begin{aligned} (X+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k} A_k(X) = y^n A_0(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k} A_k(X) \\ &= y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}(y+ka)^{n-k} \frac{1}{k!} X(X-ka)^{k-1} \\ &= y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(X-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} \end{aligned}$$

donc en évaluant en $x \in \mathbb{C}$:

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{C}^3,\ \ (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

6 Etablir la relation :

$$\forall (a,y) \in \mathbb{C}^2,\ ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}$$

Plus facile que cela en a l'air :considérons à présent $y \in \mathbb{C}$ fixé et dérivons la relation ci-dessus par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$ (on se restreint à x réel pour pouvoir dériver) :

$$n(x+y)^{n-1} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(k-1)(x-ka)^{k-2}(y+ka)^{n-k}$$

puis on évalue cette relation pour $x = 0$:

$$ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1} (y + ka)^{n-k}$$