Programme de colles, semaines 1-2:

Contenu:

Chapitre 1 : Elements de logique et de raisonnement : assertions, négation d'une conjonction, négation d'une disjonction, négation d'un quantificateur, existentiel ou universel. Récurrences simples, doubles, fortes.

Attention : je n'ai pas traité de l'implication en détail. Je n'ai pas traité non plus les raisonnements par analyse-synthèse.

Chapitre 2 : Inégalités, valeurs absolues, calculs de sommes et de produits (mais pas de sommes doubles ou triangulaires); petits systèmes linéaires et interprétation géométrique.

Chapitre 3 : Trigonométrie (sans lien avec les nombres complexes)

Questions de cours :

Chapitre 1 : logique, modes de raisonnement - Appliquer sur un exemple concret les règles de négation des prédicats (avec "et", "ou", "$\forall$" et "$\exists$").

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Enoncer avec quantificateurs "f admet un minimum", puis sa négation (exo 11 du cours).
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Enoncer avec quantificateurs "f est majorée", puis sa négation (exo 14 du cours).
- Exercice 15 : Montrer que $\forall n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$.
- Exercice 16 :Soit (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Il s'agit de la suite de Fibonacci. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Chapitre 2 : calculs algébriques - Enoncés des règles sur les inégalités (proposition 4 du cours). Quelles opérations sont interdites ? (citez deux opérations!)

- Définition de la valeur absolue.
- Inégalités triangulaires, forme générale (majoration et minoration de $|x+y|$ et de $|x-y|$), avec démonstration.
- On suppose $2 \leq |a| \leq 4$ et $5 \leq |b| \leq 6$. Encadrer $|a-2b|$ puis $\dfrac{a^2\,|b+1|}{|a-2b|}$.
- Résoudre l'inéquation $|x^2 - 2x - 4| \leq 1$.
- définition d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.
- définition du maximum (ou plus grand élément) d'une partie de $\mathbb{R}$.
- Compléter :

$$\sum_{k\in I}(a_k + b_k) = \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k b_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k = \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) =$$

$$\prod_{k\in I}(a_k)^s = \qquad (s\in\mathbb{N})$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + \lambda) =$$

Relation de Chasles : si l'on a $p \leq r \leq q$, alors :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k +$$

- somme des entiers de 1 à n , avec démonstration.
- somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, avec démonstration.
- factorisation de $a^n - b^n$ avec démonstration.
- Calculer $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k\,(k+2)}$.
- Simplifier $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.
- définition de $\dbinom{n}{p}$ et **formule** du triangle de Pascal, énoncé et démonstration.
- Formule du binome de Newton (énoncé).
- Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}$ puis montrer que $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \dbinom{n}{n} = 0$. En déduire $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \dbinom{n}{k}$ et $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \dbinom{n}{k}$.
- On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 3 \\ 2x + y + z & = & 1 \end{array}\right.$. Expliquer sans calculs pourquoi on peut trouver $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'ensemble des solutions soit

$$S : \{(x_0 + \lambda\alpha, y_0 + \lambda\beta, z_0 + \lambda\gamma) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Résoudre le système (S) ci-dessus.
- Résoudre le système (S) et interpréter géométriquement les résultats en fonction du paramètre a :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcr} (a+1)\,x + 2y - 4z & = & 2 \\ -x + (a-2)\,y + 2z & = & -1 \\ x + y + (a-3)\,z & = & 1 \end{array}\right.$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que:

$$na^{n-1}(b-a) \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b-a).$$

- Factoriser $S_n = 1 - 2x + 4x^2 + \cdots + (-1)^n\, 2^n x^n$.

Chapitre 3 : Trigonométrie - formules lues sur le cercle trigonométrique : $\cos(\pi - x) =, \ldots$

- Pour n entier naturel non nul, on pose $S = \sum\limits_{k=0}^{2n} \cos\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$. Grâce à un changement d'indice, montrer que $S = 0$. Conclure. Indication : faire un dessin pour comprendre pourquoi les termes se simplifient.
- Pour n entier naturel non nul, calculer la somme $S = \sum\limits_{k=0}^{2n} 2^k \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ en séparant les termes de la somme suivant la parité de k.
- formules d'addition, de duplication, de linéarisation.

- Résoudre l'équation $2\cos^2(\theta) - 3\cos(\theta) + 1 = 0$.
- interprétation géométrique de $\tan(x)$.
- Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -\frac{1}{5}$. Que vaut $\tan(x)$?
- $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$, $\tan(2a)$
- Graphe précis des fonctions sin, cos et tan, et dérivée de tan (2 formes).
- Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.