D.M.1 pour le 03 Octobre 2024

Exercice : On se propose d'étudier la suite (z_n) de nombres complexes définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et par la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right).$$

1 Question préliminaire: on pose lorsque $\sin(x) \neq 0$: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
Montrer que $f(x) = x\cot(x)$ admet quand x tend vers 0 une limite que l'on déterminera.

2 Dans cette question, on suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer alors z_n pour tout $n \geq 1$.

3 Dans la suite, on suppose que z_0 n'est pas réel et on l'écrit sous forme trigonométrique: $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z_0|$ et $\theta \in \,]-\pi, 0[\,\cup\,]0, \pi[$.

3a Déterminer la forme trigonométrique de z_1

3b Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \rho e^{i\theta/2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

3c Montrer à présent que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$z_n = \frac{\rho}{2^n} \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\theta/2^n}.$$

3d On note maintenant x_n la partie réelle de z_n et y_n la partie imaginaire de z_n. Exprimer x_n et y_n en fonction de ρ, θ et n et déterminer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Problème :

Pour traiter ce problème, on admettra le théorème suivant:

Théorème : Si $P(z) = a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ est un polynôme de degré p (p est un entier naturel et les coefficients $a_p, a_{p-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des nombres réels ou complexes) admettant p racines distinctes $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$, alors on peut factoriser P sous la forme:

$$P(z) = a_p(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_p).$$

On suppose $n \geq 2$ et $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

1 Montrer que $e^{\frac{i\pi}{n}} \times e^{\frac{2i\pi}{n}} \times e^{\frac{3i\pi}{n}} \times \cdots \times e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} = i^{n-1}$.

2 Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \cdots \times \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

3 On pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 1, 2, \dots n-1$.

3a Calculer $P(z_k)$.

3b En déduire la factorisation de P en produits de facteurs de degré 1 (on pourra utiliser le théorème admis).

4 Montrer que

$$n = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \cdots \times \sin\left(\frac{(n-1)\,\pi}{n}\right)$$

5 Soient $A_0, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ les points d'affixes respectives $1, z_1, z_2, \dots z_{n-1}$.

5a Calculer le produit des distances $A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots \times A_0A_{n-1}$.

5b Montrer que le produit des longueurs des arêtes et des diagonales du polygône $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ est égal à $\sqrt{n^n}$ (les arêtes et les diagonales sont les segments $[A_jA_k]$ pour $j \neq k$).