D.M.2 pour le 4 Novembre 2024

Exercice 1 : Le but de l'exercice est de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$(E) : \arcsin(3x - 4x^3) = 3\arcsin(x)$$

0 Pour quels réels a-t-on $\arcsin(\sin(x)) = x$?

1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

2 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x: $f(x) = 3x - 4x^3$. Dresser la tableau de variation de f en y faisant figurer $f(1)$ et $f(-1)$.

3 Résoudre l'équation (E). On pourra d'abord déterminer pour quels réels cette équation est définie.

Exercice 2 : On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall t \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(t) = t + \ln(t)$

1a Montrer que φ est une bijection.

1b Dresser le tableau de variation de son application réciproque φ^{-1} en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $\varphi^{-1}(1)$.

2 On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\varphi^{-1}(x))$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi^{-1}(x)$.

2b Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites aux bornes de son domaine de définition et la valeur de $f(1)$.

2c Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente T_1 à C_f en son point d'abscisse 1.

2d Montrer: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = -\varphi^{-1}(x)$.
En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (c'est-à-dire préciser si C_f est au dessus ou en dessous de Δ). Déterminer la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2e Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$: $f(x) - \ln(x) = -\ln\left(1 + \frac{\ln(t)}{t}\right)$, où $t = \varphi^{-1}(x)$.
En déduire la position relative de C_f par rapport à la courbe $C_{\ln}$ de ln sur $]1, +\infty[$ et la limite de $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2f Tracer dans un repère orthonormé du plan l'allure de la courbe C_f en y faisant figurer les droites T_1 et Δ, et la courbe $C_{\ln}$.

2g Montrer que f est une bijection et déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.