# D.M.3 pour le 14 Novembre 2024

**Problème : des calculs d'intégrales**

Dans ce problème, $a$ est un réel strictement positif et $f$ désigne une fonction définie sur $[0, a]$ à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ et vérifiant $f(0) = 0$.

On sait alors que $f$ est bijective de $[0, a]$ sur $[0, f(a)]$ et admet une bijection réciproque, notée $g$.

La fonction $g$ est caractérisée par:

$$\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], (y = f(x) \Longleftrightarrow x = g(y)).$$

On sait aussi que $g$ est continue sur l'intervalle $[0, f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

**Partie A :** Dans cette partie, on montre que pour tout réel $\gamma$ tel que $0 \leq \gamma \leq a$, on a:

$$(1) \qquad \int_0^{\gamma} f(x)\, dx + \int_0^{f(\gamma)} g(y)\, dy = \gamma f(\gamma)$$

**1a** Justifier que $g(0) = 0$.

**1b** Exemple: on prend $f(x) = x^p$ avec $p$ réel strictement positif; vérifier alors la relation $(1)$.

**2** Pour tout réel $\gamma$ tel que $0 \leq \gamma \leq a$, on note $\phi(\gamma)$ la quantité:

$$\phi(\gamma) = \int_0^{\gamma} f(x)\, dx + \int_0^{f(\gamma)} g(y)\, dy - \gamma f(\gamma).$$

**2a** Exprimer la fonction $\phi$ à l'aide de $f$ et de primitives de $f$ et de $g$ dont on justifera l'existence.

**2b** En déduire que la fonction $\phi$ ainsi définie sur $[0, a]$ est continue sur $[0, a]$.

**2c** Montrer que $\phi$ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en déduire que $\phi$ est constante sur $]0, a[$.

**2d** En déduire l'égalité $(1)$.

**Partie B :** Dans cette partie, on utilise l'égalité $(1)$ pour le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

**1a** Soit $P(x) = x^4 + 1$. Vérifier que

$$\frac{x^2}{x^4+1} = A\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right)$$

pour un réel $A$ que l'on explicitera.

**1b** Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = A\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}dx.$$

**1c** En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{A}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + A\left(\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$$

**1d** puis que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{A}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \frac{A\pi}{2}.$$

**2** Dans cette question, $f_0$ désigne la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

**2a** Montrer que $f_0$ induit une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle que l'on précisera et donner l'expression de $f_0^{-1}$.

**2b** Calculer $\int_0^1 \arctan(y^2)\,dy$ par intégration par parties.

**2c** En utilisant $(1)$, en déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

**Partie C :** Dans cette partie, on revient au cas général.
$\gamma$ désigne un réel vérifiant $0 \leq \gamma \leq a$ et $\beta$ un réel vérifiant $0 \leq \beta \leq f(a)$.

**1** Montrer soigneusement que:

$$\int_{f(\gamma)}^{\beta} g(y)\,dy \geq \gamma(\beta - f(\gamma))$$

puis que:

$$(2) \qquad \gamma\beta \leq \int_0^{\gamma} f(x)\,dx + \int_0^{\beta} g(y)\,dy$$

**2** Etudier dans l'intervalle $[0, f(a)]$ les variations de la fonction définie par:

$$\forall t \in [0, f(a)],\, h(t) = \gamma t - \int_0^t g(y)\,dy.$$

Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule $(2)$.

**Problème :** Soit $n$ un entier strictement positif.

On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0,+\infty[$suivante:

$$(E_n) : y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

**1** Résoudre l'équation sans second membre associé à l'équation $(E_n)$.

**2** Résoudre l'équation $(E_1)$.

**3** Résoudre l'équation $(E_2)$.

On fixe maintenant $n \geq 3$ et on définit sur l'intervalle $]0,+\infty[$ la fonction $\phi_n$ par l'égalité:

$$\text{si } x > 0, \text{ alors } \phi_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$$

(On ne cherchera pas à déterminer $\phi_n(x)$ par un calcul de primitive )

**4** En utilisant la méthode de variation de la constante, exprimer les solutions de $(E_n)$ à l'aide de la fonction $\phi_n$.

**5** Dans cette question, on étudie si une solution de $(E_n)$ admet une limite réelle en $0^+$.

**5a** Soit $x > 0$. Justifier, pour $t \in [0, x]$, l'inégalité: $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$

**5b** En déduire l'encadrement: $\dfrac{1}{1+x^2} \dfrac{x^n}{n} \leq \phi_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n}$

**5c** Montrer qu'il existe une et une seule solution de $(E_n)$ admet une limite réelle en $0^+$. Préciser cette solution, qu'on notera $f_n$, et sa limite en $0^+$.

**6** On cherche maintenant à terminer l'étude des variations de la fonction $f_n$.

**6a** Justifier que $f_n{}'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - n\dfrac{\phi_n(x)}{x^n}\right)$ et en déduire le sens de variation de $f_n$.

**6b** Justifier que $f_n$ admet une limite réelle en $+\infty$

**7** Etudier la dérivabilité en 0 du prolongement par continuité de $f_n$.