D.M.4 pour le 5 Décembre 2024

Exercice 1 : *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite telle que pour tout entier naturel non nul* n, $u_n > 0$
On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ *converge vers* l *avec* $0 < l < 1$
On pose $q = \frac{1+l}{2}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

1 Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \le q^n$

2 Montrer que si $n \ge n_0$, $S_n \le S_{n_0-1} + \dfrac{q^{n_0}}{1-q}$

3 En déduire que la suite (S_n) converge

4 On pose $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$

4a Déterminer la limite de la suite $a_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

4b Exprimer $\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{v_n}}\right)$ en fonction de a_n et en déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{v_n}}\right)$

4c En déduire que (σ_n) converge.

Exercice 2 :

On pose, pour x, réel, $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\arctan(x)$

1 Justifier que la fonction f est dérivable et vérifie :

$$\text{Pour tout réel } x, 0 < f'(x) \le \frac{1}{2}$$

2 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
Préciser dans quel intervalle l'inégalité $f(x) \le x$ est vérifiée.

On pose, dans la suite de l'exercice, $h(x) = \frac{1}{2}(x+\alpha)$. On considère un réel $a \ge \alpha$ et un définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations:

$$u_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
$$v_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = h(v_n).$$

3 Etude de la suite (u_n).

3a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge \alpha$.

3b En déduire que la suite (u_n) est monotone et qu'elle converge.

3c Préciser la limite de la suite (u_n).

4 Calcul de v_n:

4a Exprimer $v_{k+1} - \alpha$ en fonction de $v_k - \alpha$.

4b En déduire une expression de v_n en fonction de n et α.

5 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \alpha)$.

5a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

5b En déduire que la suite (S_n) converge et est de limite $L \in [0, 2\,(a - \alpha)]$.