

D.M.5 pour le 6 Janvier 2025

Exercice 1 : Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \frac{1}{\sqrt{2}}A$.

- 1 Calculer K^2 , K^3 , puis K^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ en distinguant les cas n pair et n impair.
- 2 Exprimer M à l'aide de I_3 et de K , et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = I_3 + a_n K + b_n K^2$ avec $a_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^k$ et $b_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^k$
- 3 Calculer $1 + a_n + b_n$, puis $1 - a_n + b_n$. En déduire a_n et b_n en fonction de n .
- 4 Exprimer M^n en fonction de I_3 , A et B .

Problème: méthode de Newton :

Première partie: autour des accroissements finis :

Soient des réels a, b , un intervalle $I = [a, b]$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

- 1a Justifier l'existence d'un réel M tel que $\forall x \in I, |f''(x)| \leq M$.
- 1b Montrer que $\forall x, y \in I, |f'(x) - f'(y)| \leq M|x - y|$.
- 1c Montrer que $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y) - (x - y)f'(x)| \leq M|x - y|^2$.
- 2a Soit g une fonction deux fois dérivable sur I . Montrer que si $g(a) = g'(a) = g(b) = 0$, alors g'' s'annule.
- 2b On pose $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) - A(x - a)^2$, pour un réel A à choisir.
Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
On choisit A de sorte que $g(b) = 0$.
- 2c Montrer à l'aide du 2.a. qu'il existe $d \in I$ tel que $A = \frac{f''(d)}{2}$.
- 2d Montrer qu'alors, $f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(d)}{2}(b - a)^2$.

Deuxième partie: méthode de Newton :

Soient des réels a, b , un intervalle $I = [a, b]$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que:

$$f(a) < 0 < f(b) \quad ; \quad f' > 0 \text{ sur } I \quad ; \quad f'' > 0 \text{ sur } I \quad .$$

On pose $m = \min_{x \in I} f'(x)$ et $M = \max_{x \in I} f''(x)$. (on ne demande pas de justifier leur existence).

Soit Γ la courbe représentative de f .

- 1** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ω dans l'intervalle I .
On définit une suite (x_n) par : $x_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe (Ox) de la tangente à Γ au point d'abscisse x_n .
- 2** Faire un schéma (cohérent avec les hypothèses sur f) où l'on fera apparaître x_0 , x_1 et x_2 .
Montrer que $x_{n+1} = \phi(x_n)$ pour une fonction $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- 3a** Montrer que ϕ est strictement croissante sur $[\omega, b]$
- 3b** Montrer par récurrence sur n que pour tout entier n , $\omega < x_{n+1} < x_n \leq b$.
- 3c** Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite
- 4a** Montrer que $|x_{n+1} - \omega| = \frac{1}{|f'(x_n)|} |f(\omega) - f(x_n) - (\omega - x_n)f'(x_n)| \leq \frac{M}{m} |x_n - \omega|^2$.
- 4b** Montrer que pour tous entiers n et N avec $n \geq N$, $|x_n - \omega| \leq \frac{m}{M} \left(\frac{M}{m} (x_N - \omega) \right)^{2^{n-N}}$.
- 4c** Justifier qu'il existe N tel que $\frac{M}{m} (x_N - \omega) < 1$. Que pensez-vous de la vitesse de convergence de la suite $(x_n - \omega)$ comparée à une suite géométrique de raison $q < 1$? Indication : on pourra montrer que si $q, q' \in]0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q'^{2^n}}{q^n} = 0$.