Programme de colles, semaines 13 et 14

Chapitre 10 : Dérivation - Etudier la dérivabilité en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

- dérivable $\Longrightarrow$ continue (avec démonstration).
- formule de Leibniz: énoncé (avec hypothèses!)
- dérivée n_ième de $f(x) = (x^2 + x + 1)\, e^{3x}$.
- g n fois dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I, montrer que $1/g$ est n fois dérivable sur I.
- Enoncé du théorème de Rolle.
- Egalité des accroissements finis (énoncé et démonstration à partir du théorème de Rolle).
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$
- Enoncé de l'inégalité des accroissements finis + exercice :majorer l'erreur dans l'approximation 100 pour $\sqrt{10001}$.
- Exercice : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $\Longrightarrow f$ lipschitzienne sur ce segment.
- $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$,dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$. Préciser les inclusions entre $\mathcal{C}^\infty(I), \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $\mathcal{C}^n(I)$ et justifiez-les.
- Enoncé du théorème de la limite de la dérivée + exercice $f(x) = \cosh(\sqrt{x})$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I et s'annulant au moins $(n+1)$ fois sur I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
- Calculer la dérivée n_*ième* de $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$. En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$
- Soit (E) : $y'' + a(x)y = b(x)$ avec a, b de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Montrer que toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
- Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $g(0) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \left]0,1\right[$ vérifiant $2g(c)\, g'(c)\, g(1-c) = g^2(c)\, g'(1-c)$.
- Montrer que pour tout réel $x \in [0,1[$, $x \leq \arcsin(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq a \leq b$, $\dfrac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan(b) - \arctan(a) \leq \dfrac{b-a}{1+a^2}$
- Fonctions convexes : définition, caractérisation par les pentes, position par rapport aux tangentes (énoncés seulement)

Attention : l'inégalité de Jensen n'est pas au programme, elle doit être donnée si elle soit être utilisée.

- Exercice : soit $f : [A, +\infty[\to \mathbf{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est décroissante sur $[A, +\infty[$.
- Montrer que:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

- Exercice : soient $a, b, x, y > 0$. Montrer:

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\left(\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)\right).$$

Chapitre 11 : Matrices et systèmes linéaires :

- Produit d'une matrice par un vecteur colonne, produit de deux matrices, formule générale et application à des exemples particuliers.

- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T =?$ avec démonstration.

- Donner 3 propriétés naturelles qui NE SONT PAS vérifiées par le produit des matrices, avec les contre-exemples associés.

- Calcul du produit de deux matrices élémentaires : $E_{i,j}E_{k,l} =?$

- Soit $A = . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Produit de deux matrices triangulaires supérieures (avec dém.)

- Binome de Newton et égalité de Bernouilli avec conditions d'applications.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Conditions d'existence et formules pour l'inverse d'un produit, et pour l'inverse d'une transposée.

- relation entre solutions d'un système linéaire et du systéme linéaire homogène associé.

- définition des matrices de transposition, de dilatation et de transvection et interprétation en tant qu'opération sur les lignes d'une matrice (démonstration partielle de quelques points, le tout serait trop long).

- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution d'un sytème linéaire.

- A pratiquer sur :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcul de A^n pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (vu en TD en dernière question de l'exo avec les suites u_n, v_n, w_n).