# D.M.7 3 Mars 2025

**Exercice 1 :** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$.
- on pose $P_n(X) = (X^2-1)^n$
- on appelle $n$-ième polynôme de Legendre, noté $L_n$, la dérivée $n$-ième du polynôme $P_n$ : $L_n(X) = P_n^{(n)}(X)$.
  Ainsi, $L_0 = P_0$, $L_1 = P_1'$, $L_2 = P_2''$, ...

**1 : Exemple** $n = 2$ :

**1a** Ecrire sous forme développée les polynômes $L_0$, $L_1$ et $L_2$.

**1b** Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**2 : Base des polynômes de Legendre** Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

**2a** Déterminer le degré de $L_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi que son coefficient dominant.

**2b** Justifier que $\mathcal{B}_n = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**2c** Préciser l'ordre de multiplicité des racines de $P_n$. Soit $k \in [|0, n-1|]$. Que valent les nombres $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$ ?

**2d** Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :

$$\forall k \in [|0,n|], \quad \int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n-k)}(t)\, Q^{(k)}(t)\, dt.$$

**2e** En déduire : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, Q(t)\, dt = 0$.

**2f** En déduire que pour tous entiers naturels $j \neq k$ : $\int_{-1}^{1} L_j(t)\, L_k(t)\, dt = 0$.

**3a** Justifier que pour tout entier $k$, $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2\, dt > 0$. Cette question doit être admise tant qu'on n'a pas fait le chapitre 17.

**3b** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $P$ dans $\mathcal{B}_n$ en fonction des intégrales $\int_{-1}^{1} P(t)\, L_k(t)\, dt$ et $\int_{-1}^{1} (L_k(t))^2\, dt$ avec $k \in [|0, n|]$.

**Problème :** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$.

On donne $e \simeq 2.7$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$ ; $\sqrt{2} \simeq 1.4$ ; $3\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} \simeq 1.2$ et $\ln(3) \simeq 1.1$

**Partie 1 : étude d'une fonction.**

**1** Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition.

**2** Donner le tableau de variations de $f$, précisez les asymptotes.

**3** Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abcisse 0.

**4** Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

**Partie 2 : étude de deux suites.** On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel $n$ est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

**5** Quel est le signe de $f_n(0)$ ? de $f_n(1)$ ?

**6** Etudier les variations de $f_n$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Justifiez ensuite que les éventuelles monotonies de $f_n$ obtenues sont strictes.
Donner la limite de $f_n(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$. En déduire que $f_n$ s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels, et exactement deux, notés $u_n$ et $v_n$ et vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

**7** Quelle est la limite de la suite $(v_n)$ ?

**8a** Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de $u_n^n$.

**8b** En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

**8c** Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n \geq 2}$.

**8d** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $l$ sa limite.

**9** Soit $g_n$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.

**9a** Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

**9b** On suppose que $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Qu'en conclut-on ?

**9c** Soit la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2,\ w_n = u_n - 1$. Trouver, en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n)$, un équivalent simple de $w_n$.

**Partie 3 : étude d'une équation différentielle.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_n$ l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)\, y = n - 2x^2$. Soit $H_n$ l'équation homogène associée à $E_n$.

**10** Résoudre $H_n$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

**11** En déduire les solutions de $E_n$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.