# Programme de colles, semaines 19 et 20

**Chapitre 14 : Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ applications linéaires et matrices canoniquement associées Questions de cours :**

**L'espace vectoriel** $\mathbb{R}^n$ :

- définitions propres!! d'une base, d'une famille libre, d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, du terme combinaison linéaire.

- Démonstration de ce que les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ forment bien une base de $\mathbb{R}^n$.

- base$\Leftrightarrow$libre et génératrice :démonstration.

- Démonstration de ce qu'un plan vectoriel (ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires) est un sev de $\mathbb{R}^n$.

- Définition de $Vect\,(X)$ , et montrer que c'est un sev de $E$.

- Exercice : Dans $\mathbb{R}^4$, soit $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = 0\}$ . Montrer que $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de $V$.

**Applications linéaires de** $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ :

- $f$ linéaire, montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont des sev de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

- Condition nécessaire et suffisante d'injectivité et de surjectivité d'une application linéaire (énoncé en termes de noyau ou d'image, sans démonstration)

- Enoncé du lien entre application linéaire et matrice canoniquement associée:

*Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est canoniquement associée à une matrice de taille $(n, p)$ dont les colonnes sont dans l'ordre les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ des images par $f$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$,*

*c'est-à-dire que si $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, alors ceci se résume dans l'écriture:*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f((x, y, z)) = (x, z, y + z, x + y)$ .

1.a.) Justifier que $f$ est linéaire.

1.b.) Décrivez deux méthodes permettant de donner la matrice canoniquement associée à $f$.

- Exercice: Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$. Montrer que $f \circ f = f$, déterminer $\ker(A)$ et $\ker(A - I_3)$. Montrer que $\ker(A)$ et $\ker(A - I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

- Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un linéaire et bijective, montrer que $f^{-1}$ est linéaire.

**Chapitre 15 : espaces vectoriels, dimension** - $Vect\,(X)$ , est le plus petit sev de $E$ contenant $X$ : preuve.

- Exercice : On pose $f_n : x \to e^{nx}$. Montrer que $(f_0, f_1, \ldots f_n)$ est libre dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ .

- Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés est libre : preuve. Définir "base de $\mathbb{K}_n[X]$ de polynômes de degrés échelonnés"

- Base et dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec démonstration.

- Base et dimension de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, avec démonstration.

- Exercice : Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$, $a \neq b$. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus 4 et admettant $a$ et $b$ comme racines est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$. En trouver une base.

**Sommes de sev, sommes directes, supplémentaires**

- Si $V$ et $W$ sont des sev de $E$, définition de $V + W$ et preuve que c'est un sev de $E$.

- Sous-espaces vectoriels en somme directe.

- Définition et caractérisation des supplémentaires (avec démonstration). Enoncé (sans dém.) des deux théorèmes liant supplémentaires et bases obtenues comme réunions de bases des deux supplémentaires.

- $E$ de dimension finie, $F$ sev de $E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, montrer que $F = E$.

- $\dim(F + G)$ et théorème de caractérisation des supplémentaires par l'intersection et la dimension: énoncé et dém. du théorème (pas dém de la formule donnant $\dim(F + G)$).

- Exercice : soient $F = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{C}) \ / \ \int_{-1}^{1} f = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{C}) \ / \ f \text{ constante} \}$. Montrer que $F$ et $G$ sont deux sev supplémentaires de $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{C})$.

**ATTENTION : l'ev des matrices et les sev (matrices diag, triang., symétriques et antisymétriques) n'ont pas encore été étudiés. Pas d'exercice sur cette partie.**