

D.M.7 3 Mars 2025

Exercice 1 : On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note I_n l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la multiplication.

Pour θ réel quelconque, on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Soit F le sous ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Soit G le sous ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ avec $(c, d) \in \mathbb{R}^2$

0 Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1 Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser une base de F et la dimension de F .

Justifier rapidement que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2 Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit θ un réel, $\theta \neq k\pi$, k entier relatif quelconque et C l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et vérifiant $MR_\theta = R_\theta M$.

3a Montrer que F est inclus dans C .

3b Déterminer $G \cap C$.

4 Montrer que $F = C$.

Exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .
- on pose $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$
- on appelle n -ième polynôme de Legendre, noté L_n , la dérivée n -ième du polynôme P_n : $L_n(X) = P_n^{(n)}(X)$.
Ainsi, $L_0 = P_0$, $L_1 = P_1'$, $L_2 = P_2''$, ...

1 : Exemple $n = 2$:

1a Ecrire sous forme développée les polynômes L_0 , L_1 et L_2 .

1b Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 : Base des polynômes de Legendre Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

2a Déterminer le degré de L_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi que son coefficient dominant.

2b Justifier que $\mathcal{B}_n = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2c Préciser l'ordre de multiplicité des racines de P_n . Soit $k \in [0, n-1]$. Que valent les nombres $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$?

2d Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :

$$\forall k \in [0, n], \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = (-1)^k \int_{-1}^1 P_n^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) dt.$$

2e En déduire : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = 0$.

2f En déduire que pour tous entiers naturels $j \neq k : \int_{-1}^1 L_j(t) L_k(t) dt = 0$.

3a Justifier que pour tout entier $k, \int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt > 0$. Cette question doit être admise tant qu'on n'a pas fait le chapitre 17.

3b Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de P dans $\mathcal{B}_n$ en fonction des intégrales $\int_{-1}^1 P(t) L_k(t) dt$ et $\int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt$ avec $k \in [0, n]$.

Problème : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$.

On donne $e \simeq 2.7$; $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$; $\sqrt{2} \simeq 1.4$; $3\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} \simeq 1.2$ et $\ln(3) \simeq 1.1$

Partie 1 : étude d'une fonction.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition.

2 Donner le tableau de variations de f , précisez les asymptotes.

3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.

4 Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie 2 : étude de deux suites. On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

5 Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?

6 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Justifiez ensuite que les éventuelles monotonies de f_n obtenues sont strictes.

Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels, et exactement deux, notés u_n et v_n et vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

7 Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

8a Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n .

8b En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

8c Déduire de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n \geq 2}$.

8d Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

9 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0, g_n(x) = \ln(3) + n \ln(x) - x^2$.

9a Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

9b On suppose que $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Qu'en conclut-on ?

9c Soit la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2, w_n = u_n - 1$. Trouver, en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n)$, un équivalent simple de w_n .

Partie 3 : étude d'une équation différentielle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$. Soit H_n l'équation homogène associée à E_n .

10 Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

11 En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

Corrigé de l'exercice 1 : Pour θ réel quelconque, on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Soit F le sous ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Soit G le sous ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ avec $(c, d) \in \mathbb{R}^2$

0 Rappeler la dimension de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4.$$

1 Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser une base de F et la dimension de F .
Justifier rapidement que G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

- $F \subset \mathcal{M}$.
- Pour $a = b = 0$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice nulle qui appartient à F
- De plus $\lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ \lambda b + \lambda' b' & \lambda a + \lambda' a' \end{pmatrix} \in F$ donc F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $F = Vect(I_2, S)$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La famille de matrices (I_2, S) est libre donc est une base de F donc $\dim(F) = 2$.
On montre de même que G est un sous espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de base (S', S'') avec $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc G est de dimension 2.
On pouvait bien sûr procéder pour l'ensemble de cette question par "atomisation" à condition de bien le rédiger.

2 Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

- $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ entraîne $a = c = -c$ et $b = d = -b$ donc $F \cap G = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$
- De plus $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
- donc F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit θ un réel, $\theta \neq k\pi, k$ entier relatif quelconque et C l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et vérifiant $MR_\theta = R_\theta M$.

3a Montrer que F est inclus dans C .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) & -a \sin(\theta) - b \cos(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) & a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ donc } F \text{ est contenu dans } C. \end{aligned}$$

3b Déterminer $G \cap C$.

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos(\theta) + d \sin(\theta) & -c \sin(\theta) + d \cos(\theta) \\ -c \sin(\theta) + d \cos(\theta) & -c \cos(\theta) - d \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos(\theta) - d \sin(\theta) & c \sin(\theta) + d \cos(\theta) \\ c \sin(\theta) + d \cos(\theta) & -c \cos(\theta) + d \sin(\theta) \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \in C$ si et seulement si $\begin{cases} d \sin(\theta) = -d \sin(\theta) \\ -c \sin(\theta) = c \sin(\theta) \end{cases}$. Or $\theta \neq k \times \pi$ donc $\sin(\theta) \neq 0$ donc $d = c = 0$ donc $G \cap C = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.

4 Montrer que $F = C$ (on pourra supposer qu'une matrice M appartient à C et utiliser les questions 2 et 3).

Soit M une matrice quelconque. On peut écrire $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$.

$M \in C \iff MR_\theta = R_\theta M \iff (M_1 + M_2)R_\theta = R_\theta(M_1 + M_2) \iff M_1R_\theta + M_2R_\theta = R_\theta M_1 + R_\theta M_2$.

Or $M_1 \in F$ donc $M_1 \in C$ donc $M \in C \iff M_2R_\theta = R_\theta M_2$ ce qui, d'après la question 3, entraîne que $M_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ car $M_2 \in G$.

On en déduit que $M \in C \iff M = M_1$ donc $F = C$.

Corrigé de l'exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .
 - on pose $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$
 - on appelle n -ième polynôme de Legendre, noté L_n , la dérivée n -ième du polynôme P_n : $L_n(X) = P_n^{(n)}(X)$.
- Ainsi, $L_0 = P_0$, $L_1 = P_1'$, $L_2 = P_2''$, ...

et de déterminer les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}_n$.

Sans aborder la partie 2, on pourra quand même traiter la partie 3 en utilisant uniquement le résultat de la question 2e.

1 : exemple $n = 2$:

1a Ecrire sous forme développée les polynômes L_0 , L_1 et L_2 .

On a :

$$\begin{aligned} L_0 &= P_0 = (X^2 - 1)^0 = 1 \\ P_1 &= X^2 - 1 \text{ donc } L_1 = P_1' = 2X \\ P_2 &= (X^2 - 1)^2 \text{ donc } P_2' = 4X(X^2 - 1) = 4X^3 - 4X \\ \text{donc } L_2 &= P_2'' = 12X^2 - 4 \end{aligned}$$

1b Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

L_0, L_1, L_2 sont de degré 0, 1, 2 donc forment une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à 2 donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 : Base des polynômes de Legendre Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

2a Déterminer le degré de L_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi que son coefficient dominant.

On a $\deg(P_k) = 2k$ donc $\deg(L_k) = 2k - k = k$.

De plus, le coefficient (dominant) de X^{2k} dans P_k est 1 donc celui (dominant) de X^k dans $L_k = P_k^{(k)}(X)$ vaut :

$$c(L_k) = 2k(2k-1) \cdots (k+1) = \frac{(2k)!}{k!}$$

2b Justifier que $\mathcal{B}_n = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$(L_0, \dots, L_n)$ est donc une famille de polynômes de degré échelonnés de 0 à n donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2c Préciser l'ordre de multiplicité des racines de P_n . Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Que valent les nombres $P_n^{(k)}(1)$ et $P_n^{(k)}(-1)$?

On a $P_n(X) = (X^2 - 1)^n = (X - 1)^n (X + 1)^n$ donc les racines de P_n sont 1 et -1 avec multiplicité n pour chacune.

D'après la caractérisation de la multiplicité des racines, on a donc pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.

2d Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = (-1)^k \int_{-1}^1 P_n^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) dt.$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Montrons la formule de l'énoncé par récurrence bornée sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- Initialisation : $k = 0$. On a $L_n = P_n^{(n)} = P_n^{(n-k)}$ et $Q = Q^{(0)} = Q^{(k)}$ donc évidemment, $\int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = (-1)^k \int_{-1}^1 P_n^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) dt$.
- Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons $\int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = (-1)^k \int_{-1}^1 P_n^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) dt$.

On intègre par parties en posant $\begin{cases} u(t) = Q^{(k)}(t) \\ v(t) = P_n^{(n-(k+1))}(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = Q^{(k+1)}(t) \\ v'(t) = P_n^{(n-k)}(t) \end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt &= (-1)^k \left([Q^{(k)}(t) P_n^{(n-k)}(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n^{(n-(k+1))}(t) Q^{(k+1)}(t) dt \right) \\ &= (-1)^k \left(0 - 0 - \int_{-1}^1 P_n^{(n-(k+1))}(t) Q^{(k+1)}(t) dt \right) \text{ d'après 2b} \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 P_n^{(n-(k+1))}(t) Q^{(k+1)}(t) dt \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence et donne la formule pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

2e En déduire : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = 0$.

Pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $Q^{(n)} = 0$ donc en prenant $k = n$ ci-dessus, on a : $\int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 P_n^{(n-n)}(t) Q^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 0 dt = 0$.

2f En déduire que pour tous entiers naturels $j \neq k$: $\int_{-1}^1 L_j(t) L_k(t) dt = 0$.

Or si $j \neq k$, on a $j > k$ ou $j < k$.

Par exemple, si $j > k$, on a $L_k \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ car $\deg(L_k) = k < j$ donc d'après 2d en prenant $Q = L_k$, on a $\int_{-1}^1 L_j(t) L_k(t) dt = 0$.

Idem en échangeant j et k si $j < k$.

3a Justifier que pour tout entier k , $\int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt > 0$.

- $\forall t \in [-1, 1], (L_k(t))^2 \geq 0$

- $t \mapsto (L_k(t))^2$ est continue sur $[-1, 1]$
 - $t \mapsto (L_k(t))^2$ n'est pas identiquement nulle sur $[-1, 1]$ (car sinon, L_k admettrait une infinité de racines donc serait le polynôme nul, ce qui n'est pas).
- Donc $\int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt > 0$.

3b Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de P dans $\mathcal{B}_n$ en fonction des intégrales $\int_{-1}^1 P(t) L_k(t) dt$ et $\int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 P se décompose ainsi : $P = a_0 L_0 + a_1 L_1 + \dots + a_n L_n$ avec $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a alors pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(t) L_k(t) dt &= \int_{-1}^1 (a_0 L_0 + a_1 L_1 + \dots + a_n L_n)(t) L_k(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n a_i L_i(t) L_k(t) dt = \sum_{i=0}^n a_i \int_{-1}^1 L_i(t) L_k(t) dt \\ &= a_k \int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt \text{ car tous les autres sont nuls vu 2f.} \end{aligned}$$

donc puisque $\int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt \neq 0$, il vient $a_k = \frac{\int_{-1}^1 P(t) L_k(t) dt}{\int_{-1}^1 (L_k(t))^2 dt}$.

Problème : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$.

On donne $e \simeq 2.7$; $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$; $\sqrt{2} \simeq 1.4$; $3\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} \simeq 1.2$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

Partie 1 : étude d'une fonction.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2 e^{-x^2} = 3(1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

donc f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et croissante sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

De plus, $|xe^{-x^2}| = (x^2)^{1/2} e^{-x^2}$.

Par croissance comparée, $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^{1/2} e^{-X} = 0$, or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ donc par composition de

limites, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |xe^{-x^2}| = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{-x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$.

2 Donner le tableau de variations de f , précisez les asymptotes.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} - 1 \simeq -2.2 \text{ et } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} - 1 \simeq 0.2$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-1 \searrow$	$\simeq -2.2$	$\nearrow \simeq 0.2$	$\searrow -1$

La droite horizontale $\Delta : y = -1$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

- 3** Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.

$f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une tangente T_0 d'équation $T_0 : y = 3x - 1$.

De plus :

$$\begin{aligned} f(x) - (3x - 1) &= 3xe^{-x^2} - 1 - (3x - 1) \\ &= 3x(e^{-x^2} - 1) \end{aligned}$$

Or $-x^2 \leq 0$ donc $e^{-x^2} - 1 < 0$ donc $f(x) - (3x - 1)$ est du signe de $-x$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_0 pour $x < 0$ et au-dessous pour $x > 0$. Donc le point d'abscisse 0 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion.

Remarquons qu'ici il n'était pas nécessaire de faire un développement limité. Cependant, un tel développement limité est possible et donne $f(x) = -1 + 3x - 3x^3 + o_0(x^3)$ et donne la même conclusion mais seulement au voisinage de 0.

- 4** Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie 2 : étude de deux suites. On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

- 5** Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?

$$f_n(0) = -1 < 0 \text{ et } f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0 \text{ car } 3 > e > 0$$

- 6** Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Justifiez ensuite que les éventuelles monotonies de f_n obtenues sont strictes.

ATTENTION : dans cette question, les détails sont délicats à rédiger (monotonie stricte, inégalités strictes, unicité, hypothèses des théorèmes appliqués, choix des théorèmes les plus simples à utiliser,...)

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'_n(x) = 3e^{-x^2}(nx^{n-1} - 2x^{n+1}) = 3x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2)$ donc :

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{n/2}$$

donc f_n est croissante sur $[0, \sqrt{n/2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$.

Comme f'_n ne s'annule qu'en 0 et en $\sqrt{n/2}$, ces monotonies sont en fait strictes.

Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels, et exactement deux, notés u_n et v_n et vérifiant $u_n < 1 < v_n$.

On a pour $x \geq 0$: $3x^n e^{-x^2} = 3 \frac{(x^2)^{n/2}}{e^{x^2}} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ par croissance comparée et composition de limites. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -1.$$

Donc d'après le théorème de la bijection, f_n étant strictement croissante et continue sur $[0, \sqrt{n/2}]$ et strictement décroissante et continue sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$, les restrictions de f_n à $[0, \sqrt{n/2}]$ et à $[\sqrt{n/2}, +\infty[$ induisent des bijections à valeurs respectivement dans $[-1, f_n(\sqrt{n/2})]$

et dans $\left] -1, f_n \left(\sqrt{n/2} \right) \right]$.

Enfin, les variations de f_n montrent un maximum atteint en $\sqrt{n/2}$ donc $f_n \left(\sqrt{n/2} \right) \geq f_n(1) > 0$. Donc ces intervalles $\left(\left] -1, f_n \left(\sqrt{n/2} \right) \right] \text{ et } \left] -1, f_n \left(\sqrt{n/2} \right) \right] \right)$ contiennent 0.

Donc par bijectivité, f_n s'annule un unique réel $u_n \in \left[0, \sqrt{n/2} \right]$ et en un unique réel $v_n \in \left[\sqrt{n/2}, +\infty \right[$.

Puisque $n \geq 2$, $\sqrt{n/2} \geq 1$ donc $1 < v_n$ ($v_n \neq 1$ car $f_n(1) \neq 0$) et puisque $1 \in \left[0, \sqrt{n/2} \right]$ et par croissance de f_n sur cet intervalle, $u_n < 1 < v_n$.

7 Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Remarquons que $v_n \geq \sqrt{n/2}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n/2} = +\infty$ donc par théorème de comparaison,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

8a Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n .

On a $f_n(u_n) = 0$ donc $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$ donc $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$.

8b En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

Donc $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = \frac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1 < 0$.

8c Dédurre de ce qui précède la monotonie de $(u_n)_{n \geq 2}$.

Donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et $u_n, u_{n+1} \in [0, 1] \subset \left[0, \sqrt{(n+1)/2} \right]$, intervalle sur-lequel f_{n+1} est croissante. Donc $u_n \leq u_{n+1}$.

8d Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

(u_n) est donc croissante et majorée (par 1) donc convergente vers l , d'après le théorème de la limite monotone.

9 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0, g_n(x) = \ln(3) + n \ln(x) - x^2$.

9a Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

On a pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} g_n(t) &= 0 \Leftrightarrow \ln(3) + n \ln(t) - t^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(3t^n) = t^2 \\ &\Leftrightarrow 3t^n = e^{t^2} \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2} = 1 \Leftrightarrow f_n(t) = 0. \end{aligned}$$

9b On suppose que $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Qu'en conclut-on ?

Supposons $l \neq 1$. On a $f_n(u_n) = 0$ donc $g_n(u_n) = 0$ donc $\ln(3) + n \ln(u_n) - u_n^2 = 0$ donc :

$$n = \frac{u_n^2 - \ln(3)}{\ln(u_n)}$$

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(l) \neq 0$ car $l \neq 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 - \ln(3)}{\ln(u_n)} = \frac{l^2 - \ln(3)}{\ln(l)} \in \mathbb{R}$ alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Ceci est absurde donc $l = 1$.

9c Soit la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2, w_n = u_n - 1$. Trouver, en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n)$, un équivalent simple de w_n .

On a :

$$\begin{aligned} g_n(1 + w_n) &= \ln(3) + n \ln(1 + w_n) - (1 + w_n)^2 \\ &= \ln(3) + n \ln(1 + w_n) - 1 - 2w_n - w_n^2 \end{aligned}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ donc on peut substituer w_n à t dans le développement limité en 0 de

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o_o(t^2) :$$

$$g_n(1 + w_n) = \ln(3) + n \left(w_n - \frac{1}{2} w_n^2 + o_{+\infty}(w_n^2) \right) - 1 - 2w_n - w_n^2$$

Or $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} \ln(3) + n \left(w_n - \frac{1}{2} w_n^2 + o_{+\infty}(w_n^2) \right) - 1 - 2w_n - w_n^2 &= 0 \\ \ln(3) - 1 + (n - 2) w_n - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) w_n^2 + n o_{+\infty}(w_n^2) &= 0 \\ w_n \left(n - 2 - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) w_n + n o_{+\infty}(w_n) \right) &= 1 - \ln(3) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1 - \ln(3)}{n} \frac{n}{n - 2 - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) w_n + n o_{+\infty}(w_n)} \\ &= \frac{1 - \ln(3)}{n} \frac{1}{1 - 2/n - \left(\frac{1}{2} - 1/n \right) w_n + o_{+\infty}(w_n)} \end{aligned}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 2/n - \left(\frac{1}{2} - 1/n \right) w_n + o_{+\infty}(w_n)} = 1$ donc $w_n \sim_{+\infty}$

$$\frac{1 - \ln(3)}{n}.$$

Partie 3 : étude d'une équation différentielle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$. Soit H_n l'équation homogène associée à E_n .

10 Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

Sur chacun des ces deux intervalles, (H_n) s'écrit $y' - \frac{(n - 2x^2)}{x}y = 0$, c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On pose $a(x) = -\frac{(n - 2x^2)}{x}$ puis $A(x) = \int^x -\frac{(n - 2t^2)}{t} dt = -n \ln(|x|) + x^2$, la solution générale de (H_n) sur $]0, +\infty[$ est donc $y(x) = \lambda e^{n \ln(|x|) - x^2} = \lambda x^n e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et la solution générale de (H_n) sur $]-\infty, 0[$ est $y(x) = \mu e^{n \ln(|x|) - x^2} = \mu x^n e^{-x^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$ (quitte à changer μ en $-\mu$).

11 En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

(E_n) se réécrit $y' - \frac{(n-2x^2)}{x}y = \frac{(n-2x^2)}{x}$;

$y(x) = -1$ est solution évidente de E_n .

Si on ne s'en aperçoit pas, la méthode de variation de la constante s'applique : $y(x) = \lambda(x)x^ne^{-x^2}$, on a $y'(x) = \lambda'(x)x^ne^{-x^2} + n\lambda(x)x^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}\lambda(x)e^{-x^2}$ donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } E_n &\Leftrightarrow y' - \frac{(n-2x^2)}{x}y = \frac{(n-2x^2)}{x} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)x^ne^{-x^2} + n\lambda(x)x^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}\lambda(x)e^{-x^2} - \frac{(n-2x^2)}{x}\lambda(x)x^ne^{-x^2} \\ &= \frac{(n-2x^2)}{x} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)x^ne^{-x^2} = \frac{(n-2x^2)}{x} \Leftrightarrow \lambda'(x) = (n-2x^2)x^{-n-1}e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{On prend } \lambda(x) = \int^x (n-2t^2)t^{-n-1}e^{t^2}dt = -x^{-n}e^{x^2} \text{ d'où } y(x) = 1$$

Ainsi la solution générale de E_n sur $]0, +\infty[$ est $y(x) = \lambda x^n e^{-x^2} - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Même calcul sur $] -\infty, 0[$.