D.M. 8 pour le 20 Mars 2025

Problème : Supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On se donne A et B deux sous-esapces vectoriels de E et on se pose le problème suivant :
A quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel C tel que : $A+B = A \oplus C = B \oplus C$.

Partie 1 : un exemple Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^3$ et on définit $\vec{a}_1 = (1,1,1)\,, \vec{a}_2 = (0,1,2)\,,\ A = Vect\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)$ et $B = \left\{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\right\}$.

1 Justifier que A est un plan vectoriel.

2 Montrer que B est un plan vectoriel et en déterminer une base $\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right)$.

3 On pose $\vec{c} = (1,0,2)$ et $C = Vect\left(\vec{c}\right)$.

3a Montrer que $\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{c}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Qu'en déduit-on sur A et C ?

3b Montrer que $B \oplus C = E$

3c Montrer $A + B = E$.

Partie 2 : le cas général E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Dans cette question, on suppose que le sous-espace vectoriel C existe. Montrer que $\dim(A) = \dim(B)$ et déterminer $\dim(C)$.

Dans la suite du problème, nous supposons que $\dim(A) = \dim(B)$ et nous voulons démontrer que le sous-espace vectoriel C existe.

5 On étudie pour commencer le cas où $\dim(A) = \dim(B) = n - 1$ et $A \neq B$.

5a Justifier l'existence de vecteurs $\overrightarrow{u} \in A$ et $\overrightarrow{v} \in B$ tels que $\overrightarrow{u} \notin B$ et $\overrightarrow{v} \notin A$.

5b Montrer que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \notin A \cup B$.

5c Montrer que $C = Vect\left(\overrightarrow{w}\right)$ est solution du problème posé.

6 On revient au cas général et on suppose seulement $\dim(A) = \dim(B)$.

6a Résoudre le problème posé lorsque $A = B$.

Dans la suite on suppose $A \neq B$.

6b Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel A' tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$
De manière symétrique, on introduit B' sous-espace vectoriel tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$

6c Montrer que $A' \cap B' = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\dim(A') = \dim(B') \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite, on pose $p = \dim(A') = \dim(B')$.

6d Justifier l'existence de bases $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ et $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p}\right)$ aux sous-espaces vectoriels A' et B'.

7 On forme $\mathcal{D} = (\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_p})$ en posant pour tout $i \in \{1, \ldots p\}$, $\overrightarrow{g_i} = \overrightarrow{e_i} + \overrightarrow{f_i}$.

7a Montrer que la famille $\mathcal{D}$ est libre.

7b On pose $C = Vect\,(\overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_p})$. Déterminer $\dim(C)$.

7c Montrer que $A \cap C = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

7d Conclure que $A + B = A \oplus C = B \oplus C$