

Programme de colles, semaines 21 et 22

Chapitre 15 : espaces vectoriels, dimension

- Dimension du sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Les sous-ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (dém.).

- Exercice : Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $Tr : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $Tr(M) = a + d$.

Montrer que Tr est une forme linéaire sur E . Montrer que $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E . En donner une base et la dimension.

Chapitre 16 : Applications linéaires :

Attention : le rang des familles de vecteurs, des matrices et les déterminants ne sont pas encore au programme.

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$. Montrer que f est linéaire puis que $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.

- Condition nécessaire et suffisante d'injectivité et de surjectivité d'une application linéaire (énoncé en termes de noyau ou d'image, sans démonstration)

- $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ linéaires, montrer $g \circ f = 0$ ssi $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$

- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, montrer que $g \circ f$ est linéaire.

- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow F$ sont linéaires et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrer que $\alpha f + \beta g$ est linéaire.

- Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, montrer que f^{-1} est un isomorphisme.

- Énoncé complet du théorème : étant donnés $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ dans F , il existe une unique application linéaire envoyant $\vec{e}_i$ sur $\vec{v}_i$, de plus, caractérisations de $\text{Im}(f)$, de f injective, de f surjective et de f isomorphisme en termes de la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.

En dimension finie : - Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

- Application à $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = (X+1)P - P'$, linéarité, matrices dans les bases canoniques. Idem pour $P \mapsto P'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Exercice: Soit $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On considère $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui à M associe $f(M) = AM$.

Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Projecteurs et symétries :

- Tout ou partie de ce qui suit:

$E = F \oplus G$, donner la définition de la projection sur F parallèlement à G et la définition de la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Que valent: $p_F^2, p_G^2, p_F \circ p_G, p_G \circ p_F, p_F + p_G$?

Que valent $\ker(p_F)$ et $\text{Im}(p_F)$ (avec démonstration pour ces deux points)

Retrouver F et G à l'aide de noyaux d'applications faisant intervenir s_F (avec dém.)

Donner les deux relations reliant p_F, s_F et Id_E .

- $E = F \oplus G$, soit s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Justifier que s_F est linéaire et montrer que $s_F^2 = Id_E$.

- $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$, montrer que $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires et que p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

- Exercice : Montrer qu'étant donné un projecteur ou une symétrie en dimension finie, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale

Rang des applications linéaires :

- formule du rang (énoncé et schéma de la démonstration, c'est à dire les étapes de la démonstration, sans les détails, il faut donc passer par le lemme qui précède le théorème).

- Énoncé et démonstration du théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie : si $\dim(E) = \dim(F)$, et f linéaire de E dans F , alors f injective ssi f surjective ssi f bijective.

- $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, montrer en utilisant une application linéaire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i , $P(a_i) = b_i$.

- Exercice vu dans le chapitre: Montrer en introduisant un isomorphisme, pourquoi l'équation $y' + ay = Q(x)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et Q polynôme de degré au plus n admet une et une seule solution polynomiale de degré au plus n .

- f linéaire de E dans F , montrer que $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

- f linéaire de E dans F . Montrer que $\text{rg}(f) = \dim(E)$ ssi f injective et $\text{rg}(f) = \dim(F)$ ssi f surjective.

- Exercice vu en TD : Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

a.) Montrer qu'il existe deux homothéties vectorielles vérifiant cette relation.

b.) Montrer que f est un automorphisme de E .

- Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$, $f \neq 0$ avec $\dim(E) = 3$. Déterminer $\text{rg}(f)$.

Changements de bases :

- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: en donner deux descriptions (l'une en termes de vecteurs l'autre en termes d'application linéaire).

- Formules de changement de base: énoncé précis pour les vecteurs et pour les matrices.

- Exercice : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que M est canoniquement associée à une symétrie.

Donner une matrice P telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$