D.M.9 pour 03 Avril 2025

Exercice 1 : On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$, à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [|-1, n|]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in [|0,p|],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1 Sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions.

1a Soient $(a_k)_{k \in [|-1,p|]}$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ soit la fonction nulle. Démontrer que $a_{-1} = 0$.

1b Démontrer alors que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in [|-1,p|]}$ est libre.
On note $E = Vect(\mathcal{B})$.

1c En déduire la dimension de E.

2 On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $u(f)$ définie sur J par :

$$\forall x \in J,\ u(f)(x) = (1+x) f'(x)$$

2a Déterminer pour tout $k \in [|-1,p|]$ les images de f_k par u.

2b Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2c Déterminer la noyau et l'image de u. Sont-ils suppplémentaires dans E ? (justifiez votre réponse).

2d Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$., l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

2e Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.

3 On note $H(t) = t - \ln(1+t)$. Montrer que H n'appartient pas à E mais que $H', H'', \ldots, H^{(p)} \in E$.

Exercice 2 : Dans tout l'exercice, n est un entier et $n \geq 3$. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ la base canonique de E.
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1a Montrer que l'application $T : E \to \mathbb{R}^n$ qui envoie $P \in E$ sur $T(P) = (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ est linéaire.

1b Montrer que T est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2a On note $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $L_i = T^{-1}(\vec{e}_i)$, c'est-à dire l'unique polynôme dont l'image par T est $\vec{e}_i$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les coordonnées d'un polynôme P quelconque de E dans cette base. Indication : on exprimera P dans cette base, puis on calculera $T(P)$.
Dans toute la suite de l'exercice, on note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2b L'une des réponses ci-dessous et l'une seulement est correcte. Préciser laquelle et justifier l'égalité :

réponse a : $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\left(T^{-1}\right)$

réponse b : $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{E}}\left(T\right)$

réponse c : $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{E},\mathcal{B}'}\left(T^{-1}\right)$

réponse d : $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\left(T\right)$

3 Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3a Justifier que $L_1\left(X\right) = \dfrac{\left(X-1\right)\left(X-2\right)}{\left(-1\right)\left(-2\right)}$.

3b En raisonnant de même sur les racines et le degré de L_2 et L_3, déterminer L_2 et L_3 sous forme factorisée.

3c Expliciter la matrice M.

3d Résoudre l'équation $MV = V$ d'inconnue $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}\left(\mathbb{R}\right)$.

3e En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2\left[X\right]$ tels que $P\left(X\right) = P\left(0\right) + P\left(1\right)X + P\left(2\right)X^2$.

4 On revient au cas général n quelconque.

4a Etablir la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

4b Justifier que M est inversible puis en utilisant la question 2, expliciter M^{-1} (sous forme de tableau de nombres).

4c Montrer que l'on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [|2, n|]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$

4d Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.

5 Dans cette question, on suppose $n \geq 4$ et que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$ (mais on ne connaît pas $a_4, \ldots, a_n$).
Soit u l'application de E dans E définie par $\forall P \in E$, $u\left(P\right) = Q$ avec :

$$Q\left(X\right) = P\left(0\right)L_1\left(X\right) + P\left(1\right)L_2\left(X\right) + P\left(2\right)L_3\left(X\right)$$

5a Vérifier que u est un endomorphisme de E.

5b Déterminer $\ker\left(u\right)$.

5c Montrer que $\dim\left(\ker\left(u\right)\right) = n - 3$.

5d Déterminer $\operatorname{Im}\left(u\right)$.

5e $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont-ils supplémentaires ?

5f Déterminer la restriction $u_{|\mathrm{Im}(u)}$ de l'endomorphisme u au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$. Qu'en déduit-on in fine sur la nature de u ?