Programme de colles, semaines 23 et 24

Chapitre 16 : Applications linéaires :

Rang des applications linéaires :

- formule du rang (énoncé et schéma de la démonstration, c'est à dire les étapes de la démonstration, sans les détails, il faut donc passer par le lemme qui précède le théorème).

- Enoncé et démonstration du théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie :si $\dim(E) = \dim(F)$, et f linéaire de E dans F, alors f injective ssi f surjective ssi f surjective.

- $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $b_0, \ldots b_n \in \mathbb{K}$, montrer en utilisant une application linéaire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i, $P(a_i) = b_i$.

- Exercice vu dans le chapitre: Montrer en introduisant un isomorphisme, pourquoi l'équation $y' + ay = Q(x)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et Q polynôme de degré au plus n admet une et une seule solution polynômiale de degré au plus n.

- f linéaire de E dans F, montrer que $rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

- f linéaire de E dans F. Montrer que $rg(f) = \dim(E)$ ssi f injective et $rg(f) = \dim(F)$ ssi f surjective.

- Exercice vu en TD : Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

a.) Montrer qu'il existe deux homothéties vectorielles vérifiant cette relation.

b.) Montrer que f est un automorphisme de E.

- Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$, $f \neq 0$ avec $\dim(E) = 3$. Déterminer $rg(f)$.

Changements de bases :

- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: en donner deux descriptions (l'une en termes de vecteurs l'autre en termes d'application linéaire).

- Formules de changement de base: énoncé précis pour les vecteurs et pour les matrices.

- Exercice : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que M est canoniquement associée à une symétrie. Donner une matrice P telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rang des familles de vecteurs, rang des matrices - A carrée alors A inversible ssi $rg(A) = n$.avec démonstration.

- Montrer que:

(i) $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) \leq p$

(ii) $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) = p$ si et seulement si $(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p})$ est libre.

Si E est de dimension finie, alors:

(iii) $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) \leq \dim(E)$

(iv) $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) = \dim(E)$ si et seulement si $(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p})$ est génératrice dans E.

- $\operatorname{Im}(AP) = \operatorname{Im}(A)$ si P est inversible (démonstration). Méthode de calcul de $\operatorname{Im}(A)$ par opérations élémentaires sur les colonnes de A (exposé de la méthode et justification que des colonnes échelonnées forment une famille libre).

- Exercice : Soit E un espace vectoriel avec $\dim(E) = 3$ et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $rg(f) = 1$. Montrer qu'il existe une base de E dans-laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Intégration :

- Si μ désigne la valeur moyenne d'une fonction f continue sur $[a,b]$ (à valeurs réelles), montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mu$.

- Inégalité triangulaire sur les intégrales sous sa forme la plus générale ($\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\, dt\right|$), avec démonstration.

- Enoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dém. de $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

- définition de la somme de Riemann et théorème. Application à la limite de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

- Calculer les primitives de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$.

- Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\, dx$.

- Application du changement de variables aux intégrales des fonctions paires, impaires et périodiques ($\int_0^x = \int_{-x}^0, \ldots$): énoncés et démonstration.

- Dérivabilité de $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\, dt$:énoncé + dém.

- limite de $I_n = \int_0^1 x^n \sin(e^x)\, dx$ quand n tend vers $+\infty$.

- Formule de Taylor-Lagrange : énoncé et application : montrer que pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$.

- Calculer la limite quand x tend vers 0^+ de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

- Soit $h(t) = \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[1,+\infty[$ et en déduire que pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

- Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Déterminer la limite de $\int_a^b f(x) \sin(nx) dx$ lorsque n tend vers l'infini.