Programme de colles, semaines 25 et 26

Déterminants : - énoncé du théorème admis sur les déterminants des familles de vecteurs.

- critère pour $(\overrightarrow{x_1}, \dots \overrightarrow{x_n})$ base.
- définition du dét d'un endomorphisme.
- Compléter : pour une famille de n vecteurs dans un ev de dimension n, et un endomorphisme f de cet ev, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}\left(f\left(\overrightarrow{x_1}\right), \dots f\left(\overrightarrow{x_n}\right)\right) = ?$$

- Déterminant et bijectivité. Déterminant d'une composée. (énoncés). Propriétés correspondantes pour les matrices.
- Calcul d'un déterminant $(2,2)$ ou $(3,3)$.
- Action des opérations élémentaires sur un déterminant. (énoncés).
- Exercice : montrer que deux matrices semblables ont même déterminant. (on donnera deux justifications différentes). Etudier la réciproque.
- Développement du déterminant par rapport à une colonne ou une ligne : donnez la formule!
- Factorisation du déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.
- Exercice : calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
- Exercice : soient $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

- Exercice : pour des scalaires $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{K}$, on note $V(a_1, \dots a_n)$ et on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant de la matrice $W_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $m_{i,j} = a_i^{j-1}$:

$$V(a_1, \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que l'on a :

$$V(a_1, \dots a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Indication : on posera $f(x) = V(a_1, \dots a_{n-1}, x)$ et on montrera que f est un polynôme de degré au plus $n-1$ et de racines $a_1, \dots a_{n-1}$ (supposées deux à deux distinctes dans un premier temps)

- Exercice : calculer le déterminant suivant dit tridiagonal :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Chapitre 13 : Ensembles finis et dénombrements - Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.

- Enoncé du théorème : $f : E \to F$, hypothèse sur E et F pour avoir f bijective$\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ ....
- Définition des p-listes. Nombres de p-listes d'un ensemble à n éléments.
- Définition des arrangements, calcul de A_n^p.
- Nombres de combinaisons de p éléments parmi n éléments.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini à n éléments, avec dém.
- Interprétation combinatoire de $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Idem pour la formule du triangle de Pascal.
- Exercice : déterminer le nombre de numéros de téléphone à 10 chiffres tels que :
  le numéro est formé avec deux 1, deux 3 et six 7.
  le numéro est formé avec deux chiffres distincts et deux seulement.
- Exercice :on tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

1 exactement trois coeurs.

2 exactement trois dames et au moins deux piques.

Espace probabilisé fini :

- Définition d'une probabilité sur un espace fini. Exemple de l'équiprobabilité.
- Probabilité d'une réunion d'événements, selon qu'ils sont incompatibles ou non. Enoncés et démonstration.
- Détermination d'une probabilité avec les images des singletons : énoncé. Application avec $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Formule des probabilités totales, avec démonstration.
- Exercice : On lance un dé équilibré à six faces. Si le dé donne 1, on tire une carte dans un jeu de 32 cartes; si le dé donne 2 ou 3, on tire une carte dans un jeu de 52 cartes; enfin, si le dé donne $4, 5$ ou 6, on choisit au hasard un des quatre rois.
Quelle est la probabilité d'obtenir le roi de trèfles?
- Formule de Bayes, avec démonstration.
- Exercice : Une maladie affecte un homme sur mille.On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,2\%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif?

- Exercice : Il y a deux types de jumeaux : les "vrais jumeaux" (monozygotes) et les "faux jumeaux" (dizygotes). On estime à 20% la proportion de monozygotes parmi l'ensemble des jumeaux. Par ailleurs, les grossesses gémellaires sont de deux types : bichoriale (deux placentas) pour un tiers des jumeaux monozygotes et pour tous les jumeaux dizygotes ou monochoriale (un seul placenta).
Une femme est enceinte de jumeaux, et sa grossesse est bichoriale. Calculer la probabilité qu'elle attende des "vrais jumeaux".

- Formule des probabilités composées, énoncé et démonstration.

- Exemples-types (très important) : On dispose d'une urne contenant N boules.numérotées de 1 à N. Décrire un univers Ω sur-lequel il y ait équiprobabilité et qui corresponde aux expériences aléatoires suivantes. Préciser dans chaque cas $|\Omega|$.

Exemple 1

1 *On tire une boule.*

2 *On tire successivement n boules avec remise.*

3 *On tire successivement n boules sans remise.*

4 *On tire simultanément n boules.*

- Définition des événements indépendants. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants : démonstration.

- Evénements mutuellement indépendants : définition.

- Exercice : On considère n personnes $I_1, I_2, \ldots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non" et la transmet à I_2, puis I_2 la transmet à I_3, etc. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information transmise par I_n soit celle reçue par I_1 (on établira une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}).
2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini?

Variables aléatoires sur un univers fini : ATTENTION, les lois uniforme, de Bernouilli et binomiale n'ont pas encore été étudiées, les propriétés de fin du chapitre non plus !!

- Définition d'une va, de sa loi, de sa fonction de répartition.

- Donner différentes expressions de l'espérance d'une va (réponse : $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}$).

- Exercice : On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On effectue un tirage de n boules simultanément où $n \leq a$ et $n \leq b$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

1 : Déterminer la loi de X.

2 : Démontrer que si $n \leq a$ et $n \leq b$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ (formule de Vandermonde).

3 : En déduire que $\mathbf{E}(X) = \dfrac{na}{a+b}$.

- Donner une autre démonstration de la formule de Vandermonde (la formule n'a pas à être connue).

- Définitions du moment d'ordre r, moment centré d'ordre r, de la variance et de l'écart-type, de la covariance.

- Formules de Huygens avec dém.