# Programme de colles, semaines 27 et 28-

**Séries numériques de réels ou de complexes**

- Si la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, alors elle diverge : à démontrer.
- Condition de convergence et somme d'une série géométrique (avec dém.)
- Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge par comparaison série-intégrale.
- Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge par comparaison avec la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
- Enoncé et dém du théorème sur les SATP (séries à termes positifs) équivalentes.
- Prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et calcul de la somme.
- Montrer que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.
- Si $\sum v_n$ est une SATP et si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente : énoncé et démonstration.
- Nature de la série de terme général $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- Convergence (ou divergence) des series de Riemann (dem.)
- Convergence absolue : définition et propriété principale (sans dém.)
- Déterminer la nature des séries de terme général $u_n$ dans un ou plusieurs des cas suivants :

a : $u_n = \frac{1+\ln(n)}{n^2}$ b : $u_n = \frac{2^n+5}{3^n-12}$ c : $u_n = n^{\ln(a)}$ d : $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ e : $u_n = n^2\sin(1/n)$
f : $u_n = n\sin(1/n^2)$ g : $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ h : $u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ i : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
j : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ k : $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- Exercice : trouver un équivalent du reste $R_n$ d'une série de Riemann convergente.