D.S.10 14 Juin 2025 (3 heures)

ATTENTION : Pour Frossard et Guillou : votre sujet consiste uniquement en les exos ETOILE1 et ETOILE2, je conseille de commencer par le premier.
Les exos 1, 2, 3 ne sont là que pour information. Je laisse le corrigé des exos 1,2,3.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynomes réels de degré inférieur ou égal à n. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \ \ (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt$$

Soit $\Delta : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E, \ \Delta(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + 2XP'$$

1 Vérifier que l'application $(. \mid .)$ définit un produit scalaire sur E.
On notera $\|.\|$ la norme associée.

2a Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2b Ecrire la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
En déduire $rg(\Delta)$.
Δ est-il un automorphisme de E ?

Pour tout $k \in [|0,n|]$, on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

2c Soit $k \in [|0,n|]$.
Montrer que l'endomorphisme $\Delta - \lambda_k Id_E$ est non injectif.
En déduire l'existence d'un polynome P_k de E tel que :

- P_k est de degré k.
- le coefficient dominant de P_k vaut 1.
- $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$.

2d Montrer que pour tous $P, Q \in E$, on a : $(\Delta(P) \mid Q) = (P \mid \Delta(Q))$.

Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

2e En déduire que pour tous $(k,h) \in [|0,n|]^2$ tels que $k \neq h$, on a $(P_k \mid P_h) = 0$.

2f Montrer qu'on peut choisir une base de E dans-laquelle la matrice de Δ est diagonale.
Cette base peut-elle être choisie orthonormée ?

Exercice 2 : calcul d'une somme de série. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2 Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite (qui n'est pas à calculer pour l'instant).

3 Montrer que la série $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.

4 En déduire que $l = 0$.

5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

5a Montrer que :

$$\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5b En déduire α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge (montrer que la condition sur α est nécessaire et suffisante).

6 On suppose que α prend la valeur trouvée à la question précédente et on pose $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(v_n)$.

6a Montrer que la suite $\left(\ln\left(n^{3/2} u_n\right)\right)$ converge vers $S + \ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire alors que :

$$u_n \sim_{n \to +\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$$

puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

6b En partant de $2ku_k = (2k+2) u_k - 2u_k$, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k = 2\sum_{k=2}^{n+2} ku_k + 3\sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2\sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

6c On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

En utlisant la relation précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 3 - (2n+7) u_{n+2} - u_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 3 : Etude d'une variable aléatoire. On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in \left]0,1\right[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

n est un entier naturel non nul et Ω_n désigne l'ensemble des successions de n fois "Pile" ou "Face" (donc un univers modélisant une suite de n lancers).

Ω_n est muni d'une probabilité $\mathbf{P}$, conformément aux hypothèses faites ci-dessus sur les lancers et sur la pièce.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i-ième lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire.

On appelle série une succession de lancers qui amènent tous le même côté de la pièce.

Etant donnée une série de lancers, notée ω et k un entier, $k \leq n$, on note N_k le nombre de séries observées lors des k premiers lancers.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent (dans l'ordre) FFPPPPFFPPP, on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_n$:

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= N_2(\omega) = 1; N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2 \\ N_7(\omega) &= N_8(\omega) = 3; N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4 \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer $N_{12}(\omega)$ (disons que $n \geq 12$ dans cet exemple).

1 Déterminer rapidement les lois de N_1 et N_2 et donner leurs espérances et variances.

2 Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega_n)$ puis calculer les valeurs de $\mathbf{P}(N_n = 1)$ et $\mathbf{P}(N_n = n)$.

3 : Fonction génératrice de N_n. On suppose dans les questions suivantes que la pièce est équilibrée, c'est-à dire que $p = \dfrac{1}{2}$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$:

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k.$$

3a Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

3b Que représente $G_n'(1)$?

3c Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [|1,n|]$, on a :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On admettra qu'on a aussi :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$$

Montrer alors que :

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_{n-1} = k-1)$$

3d Soient $n \geq 2$ et $s \in [0,1]$. Montrer que $G_n(s) = \dfrac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.
En déduire $G_n(s)$ en fonction de n et de s.

3e Déterminer l'espérance de N_n.

3f Déterminer la variance de N_n.

3g Donner grâce à l'expression trouvée de $G_n(s)$ la loi de la variable aléatoire N_n. Reconnaître la loi de $N_n - 1$.

Exercice ETOILE 1 :

1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.

2 Etant donné un univers Ω fini muni d'une probabilité P, une variable aléatoire X suit une loi de Rademacher si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et :

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère $X_1, X_2, \ldots X_n$ des variables aléatoires à valeurs réelles, mutuellement indépendantes, et suivant toutes une loi de Rademacher.
On admettra cette forme du lemme des coalitions : si $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ le sont aussi, pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n$.
Pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $S = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$.

2a Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$E(\exp(tS)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$$

(où $E(...)$ désigne l'espérance).

2b Rappeler et redémontrer l'inégalité de Markov.

2c Déduire des questions précédentes que pour tout $t \geq 0$, et pour tout $x \geq 0$:

$$P\left(\exp(x|S|) > e^{tx}\right) \leq 2e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}{2}\right)$$

2d On suppose $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$P(|S| > t) \leq 2\exp\left(\frac{-t^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}\right).$$

Exercice ETOILE 2 : Soit ϕ une application continue strictement positive sur $[-1,1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire euclidien défini par $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \phi(t) P(t) Q(t)\, dt$ et on note $\|P\|$ la norme associée.

La question 4 est indépendante des questions 1,2 et 3.

1 On admet *presque* qu'il s'agit en effet d'un produit scalaire : montrer seulement le caractère défini positif.

2a Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ tels que

- $(1) : \forall k \in [|0,n|]$, $\deg(P_k) = k$
- $(2) : \forall (i,j) \in [|0,n|]^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i \mid P_j) = 0$.
- $(3) : \forall k \in [|0,n|]$, $\|P_k\| = 1$.

2b Soit $k \in [|1,n|]$.

2bi Montrer que P_k a au moins une racine réelle dans $]-1,1[$.

2bii Montrer que $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.

2biii On appelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_k dans $]-1,1[$ **en-lesquelles** P_k **change de signe**. En considérant le produit scalaire de P_k avec un polynôme bien choisi, montrer que $p = k$. Conclure sur la multiplicité des racines de P_k et le caractère scindé sur $\mathbb{R}$.

2c Montrer que pour tout $k \in [|1,n-1|]$, le polynôme XP_k appartient au sous-espace $Vect(P_{k-1}, P_k, P_{k+1})$.

3 Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction constante égale à 1. Ainsi $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt$.

3a Justifier qu'il existe des polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ uniques tels que :

- $(1) : \forall k \in [|0,n|]$, $\deg(L_k) = k$
- $(2) : \forall (i,j) \in [|0,n|]^2$, $i \neq j \Rightarrow (L_i \mid L_j) = 0$.
- $(3) : \forall k \in [|0,n|]$, $L_k(1) = 1$.

3b Montrer que pour $k \in [|0,n|]$ fixé, il existe Q_k unique vérifiant les 3 conditions :

$$\deg(Q_k) = 2k,\ \ (X-1)^k \text{ divise } Q_k,\ \ L_k = Q_k^{(k)} \text{ (dérivée } k\text{-ième)}$$

3c En utilisant les questions précédentes, montrer que $(X+1)^n$ divise Q_n. Indication : justifier que pour tout $k \in [|0,n-1|]$, $\left(L_n \mid X^k\right) = 0$ et commencer par examiner ce que donne $k = 0$ puis $k = 1$.

3d En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \mu (X^2-1)^n$ puis montrer que $\mu = \dfrac{1}{2^n n!}$.

4 Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction $\phi(t) = \sqrt{1-t^2}$. On admettra que $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} P(t) Q(t) \, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'on n'aura pas à utiliser les questions 2 et 3 dans cette question.

4a Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \sin((n+1)x) = \sin(x) Q_n(\cos(x))$$

Indication : prouver séparément l'existence et l'unicité, et pour l'existence, passer par les nombres complexes.

4b Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.

4c Montrer que les Q_k sont deux à deux orthogonaux.

On admettra qu'on peut aussi montrer que $\|Q_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4d On considère l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - xt^2 - yt - z\right)^2 \sqrt{1-t^2} dt$. Montrer que g admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint. Calculer ce minimum (on pourra admettre $(X^3 \mid X) = \frac{\pi}{16}$ et $\|X^3\|^2 = \frac{5\pi}{128}$ et $\|X\|^2 = \frac{\pi}{8}$ en indiquant comment faire ces calculs).

Corrigé de l'exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et$E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynomes réels de degré inférieur ou égal à n. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \ \ (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt$$

Soit $\Delta : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E, \ \Delta(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + 2XP'$$

1 Vérifier que l'application $(. \mid .)$ définit un produit scalaire sur E.

Déjà vu en cours ou TD. Je rappelle juste que pour le caractère défini positif, il faut argumenter ainsi :
soit P tel que $(P \mid P) = 0$. Alors $\int_{-1}^{1} P^2(t)\, dt = 0$. Or pour tout $t \in [-1,1]$, $P^2(t) \geq 0$ et P^2 est continue sur $[-1,1]$ donc P^2 et donc d'après le théorème de l'intégrale nulle, P est nulle sur $[-1,1]$. Donc P admet une infinité de racines donc c'est le polynome nul.

2a Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda P + \mu Q) &= \left(X^2 - 1\right)(\lambda P + \mu Q)'' + 2X(\lambda P + \mu Q)' \\
&= \left(X^2 - 1\right)(\lambda P'' + \mu Q'') + 2X(\lambda P' + \mu Q') \\
&= \lambda\left(\left(X^2 - 1\right)P'' + 2XP'\right) + \mu\left(\left(X^2 - 1\right)Q'' + 2XQ'\right) \\
&= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)
\end{aligned}$$

donc Δ est linéaire.
De plus, avec $\deg(P) \leq n$, on a $\deg(P') \leq n-1$ et $\deg(P'') \leq n-2$ donc $\deg\left(\left(X^2 - 1\right)P''\right) \leq n$ et $\deg(2XP') \leq n$ donc $\deg(\Delta(P)) \leq n$ donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Donc Δ est bien un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

2b Ecrire la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

Commençons par calculer les cas particuliers $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$:

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= 0 \\
\Delta(X) &= 2X
\end{aligned}$$

Soit ensuite $j \in [|2, n|]$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta\left(X^j\right) &= \left(X^2 - 1\right) j(j-1) X^{j-2} + 2XjX^{j-1} \\
&= j(j-1)X^j + 2jX^j - j(j-1)X^{j-2} \\
&= j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2}
\end{aligned}$$

d'où la matrice de Δ dans la base canonique, matrice de taille $(n+1, n+1)$, où le coefficient diagonal indiqué $(j\,(j+1))$ se trouve en $(j+1)$ −ième position :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & 2 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & 6 & \ddots & -j\,(j-1) & 0 & \vdots \\
 & & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & \ddots & j\,(j+1) & 0 & -n\,(n-1) \\
\vdots & & & & 0 & \ddots & 0 \\
0 & & & & \cdots & 0 & n\,(n+1)
\end{pmatrix}$$

En déduire $rg\,(\Delta)$.
La première colonne est nulle. Les n colonnes suivantes forment une famille libre car échelonnée (en colonnnes !) donc $rg\,(\Delta) = n$.
Δ est-il un automorphisme de E ?
$\dim(E) = n + 1 > n = rg\,(\Delta)$ donc Δ n'est pas un automorphisme de E.

Pour tout $k \in [|0, n|]$, on pose $\lambda_k = k\,(k+1)$.

2c Soit $k \in [|0, n|]$.
Montrer que l'endomorphisme $\Delta - \lambda_k Id_E$ est non injectif.
Soit $k \in [|0, n|]$. Vu la matrice de Δ, la matrice de $\Delta - \lambda_k Id_E$ (dans la base canonique de E) est triangulaire supérieure avec un terme nul sur la diagonale (en position $k+1$). Donc elle n'est pas inversible. Donc $\Delta - \lambda_k Id_E$ n'est pas bijectif donc pas injectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
En déduire l'existence d'un polynome P_k de E tel que :

- P_k est de degré k.
- le coefficient dominant de P_k vaut 1.
- $\Delta\,(P_k) = \lambda_k P_k$.
  Donc $\ker(\Delta - \lambda_k Id_E) \neq \{0\}$. Soit alors $Q_k \in \ker(\Delta - \lambda_k Id_E)$, Q_k non nul. Soit $d = \deg(Q_k)$.
  Vu la matrice de Δ, donc celle de $\Delta - k\,(k+1)\,Id_E$, il est clair (puisque cette matrice est triangulaire supérieure avec un unique coefficient diagonal nul, en position $k+1$) que pour tout polynôme $Q \in E$,si $\deg(Q) \neq k$,alors $\deg((\Delta - \lambda_k Id_E)(Q)) = \deg(Q)$. Or $(\Delta - \lambda_k Id_E)(Q_k) = 0$ donc $d = k$.
  Posons $P_k = \dfrac{Q_k}{c\,(Q_k)}$ (on divise par le coefficient dominant). Alors P_k est de degrék, unitaire et dans $\ker(\Delta - \lambda_k Id_E)$ donc $\Delta\,(P_k) = \lambda_k P_k$.
  Remarque : si $j < k$ ou $j > k$, alors $j\,(j+1) < k\,(k+1)$ ou $j\,(j+1) > k\,(k+1)$ ce qui garantit que la diagonale de la matrice de $\Delta - \lambda_k Id_E$ ne contient pas d'autre élément non nul que le $k+1$_ième.

2d Montrer que pour tous $P, Q \in E$, on a : $(\Delta(P) \mid Q) = (P \mid \Delta(Q))$.

Indication : on pourra procéder par inégration par parties.
Soient $P, Q \in E$. On a :

$$(\Delta\,(P) \mid Q) = \int_{-1}^{1} \Delta\,(P)\,(t)\,Q\,(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left(\left(t^2 - 1\right) P''\,(t) + 2tP'\,(t)\right) Q\,(t)\,dt$$

on intègre par partie en posant $\left\{\begin{array}{c} u(t) = (t^2-1)\,P'(t) \\ v(t) = Q(t) \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{c} u'(t) = (t^2-1)\,P''(t) + 2tP'(t) \\ v'(t) = Q'(t) \end{array}\right.$
d'où :

$$\begin{aligned}(\Delta(P) \mid Q) &= \left[\left(t^2-1\right)P'(t)\,Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)P'(t)\,Q'(t)\,dt \\ &= -\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)P'(t)\,Q'(t)\,dt\end{aligned}$$

et ce résultat est inchangé quand on échange P et Q.
Donc le même calcul donne $(\Delta(Q) \mid P) = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\,dt = (\Delta(P) \mid Q)$.
Enfin, par symétrie du produit scalaire, $(\Delta(P) \mid Q) = (\Delta(Q) \mid P) = (P \mid \Delta(Q))$.

2e En déduire que pour tous $(k,h) \in [|0,n|]^2$ tels que $k \neq h$, on a $(P_k \mid P_h) = 0$.
Soient $k,h \in [|0,n|]$ avec $k \neq h$.
On a :$(\Delta(P_k) \mid P_h) = (P_k \mid \Delta(P_h))$ donc $(\lambda_k P_k \mid P_h) = (P_k \mid \lambda_h P_h)$ donc $\lambda_k (P_k \mid P_h) = \lambda_h (P_k \mid P_h)$. Or $k \neq h$ donc $\lambda_k \neq \lambda_h$ (voire remarque du 2c). Donc $(P_k \mid P_h) = 0$.

2f Montrer qu'on peut choisir une base de E dans-laquelle la matrice de Δ est diagonale.
La famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n donc c'est une base de E. Et puisque que pour tout k, $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$, la matrice de Δ dans cette base est diagonale (d'éléments diagonaux $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$).
Cette base peut-elle être choisie orthonormée ?
Cette base est déjà orthogonale (vu 2e). En posant $\widetilde{P}_k = \dfrac{P_k}{\|P_k\|}$, on obtient une BON $\left(\widetilde{P}_0,\ldots,\widetilde{P}_n\right)$ dans-laquelle la matrice de Δ est diagonale.

Exercice 2 : calcul d'une somme de série. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
On a $u_0 > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n > 0$.
Donc, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2 Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite (qui n'est pas à calculer pour l'instant).
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+2}{2n+5} < 1$ et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante.
Or elle est minorée par 0. Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente, de limite $l \geq 0$.

3 Montrer que la série $\sum(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}u_n\right) = \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{3}{2n+2}\right)$$

Or $\ln(1+X) \sim_0 X$ donc par substitution, $\ln\left(1 + \dfrac{3}{2n+2}\right) \sim_0 \dfrac{3}{2n+2} \sim_0 \dfrac{3}{2n}$.

La série $\sum \frac{3}{2n}$ est divergente (série harmonique $\times \frac{3}{2}$), et ce sont des SATP (séries à termes positifs), de termes généraux équivalents. Donc, aussi, la série $\sum \left(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})\right)$ est divergente.

4 En déduire que $l = 0$.

Or c'est une série télescopique de sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})\right) = \ln(u_0) - \ln(u_n)$$

Donc la suite $(\ln(u_n))$ est divergente. Or si $l \neq 0$, elle convergerait vers $\ln(l)$. Donc $l = 0$.

5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

5a Montrer que :

$$\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a pour tout n :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) \\
&= \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1+1/n}{1+5/(2n)}\right) = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)
\end{aligned}$$

Or $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to0}(x^2)$ donc par substitution :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \left(\alpha + 1 - \frac{5}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{25}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

5b En déduire α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge (montrer que la condition sur α est nécessaire et suffisante).

Si $\alpha \neq \frac{3}{2}$, alors $\ln(v_n) \sim_{+\infty} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}$, série divergente, et à termes de signes constants. Donc la série $\sum \ln(v_n)$ est alors divergente.

Si $\alpha = \frac{3}{2}$, alors $\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2} = \frac{15}{8}$ et $\ln(v_n) \sim_{+\infty} \frac{15}{8}\frac{1}{n^2}$, série (de Riemann) convergente, et SATP, donc la série $\sum \ln(v_n)$ est alors convergente.

Ainsi la série $\sum \ln(v_n)$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{3}{2}$.

6 On suppose que α prend la valeur trouvée à la question précédente et on pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(v_n)$.

6a Montrer que la suite $\left(\ln\left(n^{3/2}u_n\right)\right)$ converge vers $S+\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire alors que :

$$u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$$

puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Pour $\alpha=\dfrac{3}{2}$, on a $v_n=\dfrac{(n+1)^{3/2}u_{n+1}}{n^{3/2}u_n}$ donc $\ln(v_n)=\ln\left((n+1)^{3/2}u_{n+1}\right)-\ln\left(n^{3/2}u_n\right)$, série télescopique de sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(v_n)=\ln\left(n^{3/2}u_n\right)-\ln(u_1)$$

qui converge vers S. Donc la suite $\left(\ln\left(n^{3/2}u_n\right)\right)$ converge vers $S+\ln(u_1)=S+\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$.

Par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}u_n = e^{S+\ln\left(\frac{2}{5}\right)}=\dfrac{2}{5}e^S\neq 0$ donc $n^{3/2}u_n\sim_{+\infty}\dfrac{2}{5}e^S$ donc $u_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{2e^S}{5n^{3/2}}$.

6b En partant de $2ku_k=(2k+2)u_k-2u_k$, vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k=2\sum_{k=2}^{n+2}ku_k+3\sum_{k=2}^{n+2}u_k-2\sum_{k=1}^{n+1}u_k$$

On a :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k &= \sum_{k=1}^{n+1}\left((2k+2)u_k-2u_k\right)=\sum_{k=1}^{n+1}(2k+2)u_k-2\sum_{k=1}^{n+1}u_k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(2k+5)u_{k+1}-2\sum_{k=1}^{n+1}u_k\\
&= 2\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)u_{k+1}+3\sum_{k=1}^{n+1}u_{k+1}-2\sum_{k=1}^{n+1}u_k\\
&= 2\sum_{k=2}^{n+2}ku_k+3\sum_{k=2}^{n+2}u_k-2\sum_{k=1}^{n+1}u_k
\end{aligned}$$

6c On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.

En utlisant la relation précédente, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_n=3-(2n+7)u_{n+2}-u_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$.

La relation précédente se réécrit :

$$2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k-2\sum_{k=2}^{n+2}ku_k=3\left(T_n+u_{n+1}+u_{n+2}-u_0-u_1\right)-2\left(T_n+u_{n+1}-u_0\right)$$

donc

$$2u_1 - 2(n+2)u_{n+2} = T_n + u_{n+1} + 3u_{n+2} - u_0 - 3u_1$$

donc

$$\begin{aligned} T_n &= 5u_1 + u_0 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= 2 + 1 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1} = 3 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

Or d'après 6a, on a $u_{n+2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2e^S}{5(n+2)^{3/2}} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2e^S}{5n^{3/2}}$

donc $(2n+7)u_{n+2} \sim_{n\to+\infty} 2n\dfrac{2e^S}{5n^{3/2}} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{4e^S}{5\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+7)u_{n+2} = 0$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 3$. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3$$

Problème 1 : Etude d'une variable aléatoire. On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.
n est un entier naturel non nul et Ω_n désigne l'ensemble des successions de n fois "Pile" ou "Face" (donc un univers modélisant une suite de n lancers).
Ω_n est muni d'une probabilité P, conformément aux hypothèses faites ci-dessus sur les lancers et sur la pièce.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i-ième lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire.
On appelle série une succession de lancers qui amènent tous le même côté de la pièce.
Etant donnée une série de lancers, notée ω et k un entier, $k \leq n$, on note N_k le nombre de séries observées lors des k premiers lancers.
Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent (dans l'ordre) FFPPPPFFPPP, on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_n$:

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= N_2(\omega) = 1; N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2 \\ N_7(\omega) &= N_8(\omega) = 3; N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4 \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer $N_{12}(\omega)$ (disons que $n \geq 12$ dans cet exemple).

1 Déterminer rapidement les lois de N_1 et N_2 et donner leurs espérances et variances.
Que le premier lancer donne Plie ou Face, on a $N_1 = 1$ donc $E(N_1) = 1$ et $V(N_1) = 0$.
Les deux premiers lancers donnent :

- PP avec probabilité p^2 (alors $N_2 = 1$).
- PF avec probabilité pq (alors $N_2 = 2$).
- FP avec probabilité pq (alors $N_2 = 2$).
- FF avec probabilité q^2 (alors $N_2 = 1$).
  d'où la loi de N_2 :

k	1	2
$\mathbf{P}(N_2 = k)$	$p^2 + q^2$	$2pq$

d'où $E(N_2) = p^2 + q^2 + 4pq = 1 + 2pq$ car $(p+q)^2 = 1^2 = 1$.
Et $E(N_2^2) = p^2 + q^2 + 8pq = 1 + 6pq$ donc (Huygens) :

$$V(N_2) = E\left(N_2^2\right) - (E(N_2))^2 = 1 + 6pq - 1 - 4pq - 4p^2q^2 = 2pq - 4p^2q^2 = 2pq(1-2pq)$$

2 Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega_n)$ puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
On a $N_n(\Omega_n) = [|1, n|]$.
$N_n = 1$ ssi on n'obtient que des piles ou que des faces, événements incompatibles qui se produisent (par indépendance) avec les probabilités respectives p^n et q^n.
Donc $\mathbf{P}(N_n = 1) = p^n + q^n$.
$N_n = n$ ssi on obtient une des deux séries des lancers avec une alternance de Pile et de Face à chaque lancer, et commençant l'une par Pile, l'autre par Face.
Il faut discuter selon la parité de n :

- Si n est pair :

$$\mathbf{P}(N_n = n) = \mathbf{P}(\{PFPF\cdots PF; FPFP\cdots FP\}) = p^{n/2}q^{n/2} + q^{n/2}p^{n/2} = 2p^{n/2}q^{n/2}.$$

- Si n est impair :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N_n = n) &= \mathbf{P}(\{PFPF\cdots PFP; FPFP\cdots FPF\}) \\ &= p^{(n+1)/2}q^{(n-1)/2} + q^{(n+1)/2}p^{(n-1)/2} = p^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2}(p+q) = p^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2}\end{aligned}$$

- Dans les deux cas, $\mathbf{P}(N_n = n) = 2p^{\lfloor n/2 \rfloor}q^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

3 : Fonction génératrice de N_n. On suppose dans les questions suivantes que la pièce est équilibrée, c'est-à dire que $p = \dfrac{1}{2}$.
On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$:

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k.$$

3a Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
Puisque $N_n(\Omega_n) = [|1, n|]$, d'après le théorème de transfert :

$$E\left(s^{N_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k = G_n(s).$$

3b Que représente $G_n'(1)$?
$\forall s \in [0,1]$, $G_n'(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)\, s^{k-1}$ donc $G_n'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = E(N_n)$.

3c Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [|1, n|]$, on a :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

(P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements donc :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \mathbf{P}((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) + \mathbf{P}((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Or on remarque que $(N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n = (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ car si les deux derniers lancers sont identiques, le dernier lancer ne change pas le nombre de séries.
De plus, les lancers étant indépendants, les événements $(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}$ et P_n sont indépendants donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) \\ &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) \mathbf{P}(P_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n) &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \mathbf{P}(P_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \qquad (1)$$

On admettra qu'on a aussi :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \qquad (2)$$

Montrer alors que :

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_{n-1} = k-1)$$

(P_n, F_n) étant un système complet d'événements, on a donc par addition de (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_n = k) &= \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) \ \text{ car } \ (P_{n-1}, F_{n-1}) \ \text{ est aussi un SCE.} \end{aligned}$$

3d Soient $n \geq 2$ et $s \in [0,1]$. Montrer que $G_n(s) = \dfrac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.

On a donc pour tout $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(N_n = k) s^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1)) s^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) s^k \end{aligned}$$

Or $\mathbf{P}(N_{n-1}=n)=0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(N_{n-1}=k)\,s^k=\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}(N_{n-1}=k)\,s^k=G_{n-1}(s)$.

Et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(N_{n-1}=k-1)\,s^k=s\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(N_{n-1}=k)\,s^{k-1}=sG_{n-1}(s)$.

Donc $G_n(s)=\dfrac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.

En déduire $G_n(s)$ en fonction de n et de s.

Par récurrence immédiate, on obtient $G_n(s)=\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}G_1(s)=s\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}$ car $G_1(s)=1\times s=s$.

3e Déterminer l'espérance de N_n.

On a donc $G_n'(s)=\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}+s\dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-2}$ si $n\geq 2$ et $s\in[0,1]$.

Donc pour $n\geq 2$, $E(N_n)=G_n'(1)=1+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$ (formule encore vraie pour $n=1$).

3f Déterminer la variance de N_n.

D'après le théorème de transfert :

$$E(N_n(N_n-1))=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\,\mathbf{P}(N_n=k)=G_n''(1)$$

Or pour $n\geq 3$, $G_n''(s)=\dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-2}+s\dfrac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-3}$ donc :

$$E(N_n(N_n-1))=n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{4}=\frac{(n-1)(n+2)}{4}$$

D'après la formule de Huygens, il vient :

$$\begin{aligned}
V(N_n) &= E\left(N_n^2\right)-(E(N_n))^2=E(N_n(N_n-1))+E(N_n)-(E(N_n))^2 \text{ (linéarité de } E(.)\text{)}\\
&= \frac{(n-1)(n+2)}{4}+\frac{n+1}{2}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n-1)(n+2)}{4}+\frac{n+1}{4}(2-(n+1))\\
&= \frac{(n-1)(n+2)}{4}+\frac{(n+1)(1-n)}{4}=\frac{n-1}{4}(n+2-(n+1))=\frac{n-1}{4}
\end{aligned}$$

et cette formule est encore valable si $n=1$ ou $n=2$.

3g Donner grâce à l'expression trouvée de $G_n(s)$ la loi de la variable aléatoire N_n. Reconnaître la loi de N_n-1.

Pour tout $s\in[0,1]$, $G_n(s)=s\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{s}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}s^k=\dfrac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}s^j$ (en posant $j=k+1$).

Or $G_n(s)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(N_n=k)\,s^k$ est polynômiale, ainsi le polynôme $G_n(X)-\dfrac{1}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^k$ s'annule en tout point de $[0,1]$ donc a une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul. Donc ses coefficients sont nuls, i.e. pour tout $k \in [|1, n|]$:

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$$

Donc $\forall j \in [|0, n-1|]\,,\ \mathbf{P}(N_n - 1 = j) = \mathbf{P}(N_n = j+1) = \binom{n-1}{j} \frac{1}{2^{n-1}}$.
On reconnaît que $N_n - 1$ suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$.