

## D.S.1 samedi 28 Septembre 2024 (2 heures)

**Exercice 1 :** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère la proposition  $(P)$  suivante :

$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \implies a + b + ab \neq -1.$$

1 Ecrire la contraposée de  $(P)$ .

2 Montrer que la contraposée de  $(P)$  est vraie. Qu'en déduit-on pour  $(P)$  ?

3 Etudier la réciproque de  $(P)$ .

**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / m = f(n)$$

1 Montrer que  $f(0) = 0$ .

2 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\forall k \in [0, n], f(k) = k$ . Montrer que  $f(n+1) = n+1$ .

3 Conclure. On précisera bien les raisonnements utilisés.

**Exercice 3 :** Soit  $n \geq 2$ , on pose :

$$\forall p \in [0, n], S_p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k}$$

1 Montrer que :

$$\forall p \in [0, n-1], S_p + S_{n-p-1} = 2^n$$

2 En déduire la valeur de  $\sum_{p=0}^{n-1} S_p$ .

**Exercice 4 :**

1 Soit  $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ . Exprimer  $\frac{\sin(3y)}{\sin(y)}$  en fonction de  $\cos(2y)$ .

2 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer le produit :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\right)$$

**Exercice 5 :** On considère la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)$  définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1 Montrer que la suite  $u = (u_n)$  est croissante.

2 On est donc assurés que la suite  $u = (u_n)$  possède une limite, finie ou infinie. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que cette limite est infinie.

**3a** Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

**3b** Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ .

Quel résultat cette inégalité permet-elle de retrouver ?

**4a** Exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  uniquement en fonction de  $u_n$  la quantité :

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}.$$

**4b** En déduire une expression simplifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}.$$

**Exercice 6 :** Résoudre l'équation suivante d'inconnue complexe  $z$  :

$$(E) : z^6 + (1 - 3i)z^3 - 4 = 0$$

**Exercice 7 :** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . On pose  $a = z$ ,  $b = \bar{z}$  et  $c = \frac{z^2}{\bar{z}}$ .

On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et on note  $A, B$  et  $C$  les points images de  $a, b$  et  $c$ .

**1** Soit  $\rho$  le module de  $z$  et  $\theta$  un argument de  $z$ .

Donner les écritures trigonométriques de  $a, b$  et  $c$  en fonction de  $\rho$  et  $\theta$ .

**2** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\rho$  et  $\theta$  pour que :

(a) les points  $A$  et  $B$  soient distincts;

(b) les points  $A$  et  $C$  soient distincts;

(c) les points  $B$  et  $C$  soient distincts.

**3** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les points  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux distincts. On suppose désormais que cette condition est réalisée.

**4** Montrer que  $AB = AC$ .

**5** Placer le point  $A$  dans le plan (n'importe où hors de  $O$ ). Construire le point  $B$  puis le point  $C$ . On laissera les traits de construction et on justifiera les étapes à l'aide des résultats des questions précédentes.

**6** On pose  $Z = \frac{c - a}{c - b}$ .

**6a** Montrer que  $Z = f(\theta)e^{i\theta}$  où  $f(\theta)$  est une expression de  $\theta$  que l'on précisera.

**6b** Résoudre l'équation  $|Z| = 1$  d'inconnue  $\theta$ .

**7** Déterminer l'ensemble des points du plan en-lesquels placer le point  $A$  pour que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.

**Corrigé de l'exercice 1 :** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère la proposition  $(P)$  suivante :

$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \implies a + b + ab \neq -1.$$

**1** Ecrire la contraposée de  $(P)$ .

Cette contraposée s'écrit :

$$a + b + ab = -1 \implies (a = -1 \text{ ou } b = -1)$$

**2** Montrer que la contraposée de  $(P)$  est vraie. Qu'en déduit-on pour  $(P)$  ?

On suppose que  $a + b + ab = -1$ . Alors  $1 + a + b(1 + a) = 0$  donc  $(1 + a)(1 + b) = 0$  donc  $1 + a = 0$  ou  $1 + b = 0$  i.e.,  $a = -1$  ou  $b = -1$ .

Donc la contraposée de  $(P)$  est vraie. Donc  $(P)$  est vraie.

**3** Etudier la réciproque de  $(P)$ .

Supposons  $a + b + ab \neq -1$ . Alors  $(1 + a)(1 + b) \neq 0$  donc  $1 + a \neq 0$  et  $1 + b \neq 0$  donc  $a \neq -1$  et  $b \neq -1$ .

Donc la réciproque de  $(P)$  est vraie.

**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / m = f(n)$$

**1** Montrer que  $f(0) = 0$ .

$m = 0 \in \mathbb{N}$  donc  $m$  admet un antécédent par  $f$  (c'est ce qu'exprime la deuxième quantification dans la propriété supposée vérifiée par  $f$ ). C'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f(n) = 0$ .

Or si  $n > 0$  alors  $f(n) \geq n$  donc  $f(n) > 0$ , ce qui est absurde donc  $n \leq 0$ . Or  $n \in \mathbb{N}$  donc  $n = 0$ .

Ainsi,  $f(0) = 0$ .

**2** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\forall k \in [0, n], f(k) = k$ . Montrer que  $f(n + 1) = n + 1$ .

Soit  $r \in \mathbb{N}$  un antécédent de  $n + 1$  par  $f$  :  $f(r) = n + 1$ .

On a  $f(r) \geq r$  donc  $r \leq n + 1$ . Si  $r \leq n$ , alors  $r \in [0, n]$  donc  $f(r) = r < n + 1$ . Absurde.

Donc  $r \geq n + 1$ .

Mais  $r \leq n + 1$  donc  $r = n + 1$ . Ainsi,  $f(n + 1) = n + 1$ .

**3** Conclure. On précisera bien les raisonnements utilisés.

Les questions 1 et 2 sont respectivement l'initialisation et l'hérédité d'une récurrence **forte** sur  $n \in \mathbb{N}$  portant sur la propriété  $f(n) = n$ .

Donc grâce à ce principe de récurrence, on conclut  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$ .

**Exercice 3 :** Soit  $n \geq 2$ , on pose :

$$\forall p \in [0, n], S_p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k}$$

**1** Montrer que :

$$\forall p \in [0, n - 1], S_p + S_{n-p-1} = 2^n$$

Soit  $p \in [0, n-1]$ . On a :

$$\begin{aligned}
 S_{n-p-1} &= \sum_{k=0}^{n-p-1} \binom{n}{k} \\
 &= \sum_{l=p+1}^n \binom{n}{n-l} \text{ par changement d'indice } l = n - k \\
 &= \sum_{l=p+1}^n \binom{n}{l} \text{ par symétrie des coefficients binomiaux}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 S_p + S_{n-p-1} &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} + \sum_{l=p+1}^n \binom{n}{l} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \text{ (binome de Newton)}
 \end{aligned}$$

**2** En déduire la valeur de  $\sum_{p=0}^{n-1} S_p$ .

Par changement d'indice  $k = n - 1 - p$ , on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} S_p = \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k-1} = \sum_{p=0}^{n-1} S_{n-p-1} \text{ (indice muet)}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{p=0}^{n-1} S_p &= \sum_{p=0}^{n-1} S_p + \sum_{p=0}^{n-1} S_{n-p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} (S_p + S_{n-p-1}) \\
 &= \sum_{p=0}^{n-1} 2^n \text{ d'après 1.)} \\
 &= n 2^n
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{p=0}^{n-1} S_p = n 2^{n-1}$$

#### Exercice 4 :

**1** Soit  $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Exprimer  $\frac{\sin(3y)}{\sin(y)}$  en fonction de  $\cos(2y)$ .

L'hypothèse sur  $y$  garantit  $\sin(y) \neq 0$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(3y)}{\sin(y)} &= \frac{\sin(y+2y)}{\sin(y)} = \frac{\sin(y)\cos(2y) + \cos(y)\sin(2y)}{\sin(y)} = \cos(2y) + \frac{2\sin(y)\cos^2(y)}{\sin(y)} \\
 &= \cos(2y) + 2\cos^2(y) = \cos(2y) + 1 + \cos(2y) = 1 + 2\cos(2y)
 \end{aligned}$$

**2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer le produit :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{3^k} \right) \right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^n \left( 1 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{3^k} \right) \right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left( 3 \frac{\pi}{2 \cdot 3^k} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2 \cdot 3^k} \right)} = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left( \frac{1}{3^{k-1}} \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left( \frac{1}{3^k} \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left( \frac{1}{3^n} \frac{\pi}{2} \right)} \text{ par produit télescopique} \\ &= \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2 \cdot 3^n} \right)} \end{aligned}$$

**Exercice 5 :** On considère la suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

**1** Montrer que la suite  $u = (u_n)$  est croissante.

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ;

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$$

donc  $(u_n)$  est croissante.

**2** On est donc assurés que la suite  $u = (u_n)$  possède une limite, finie ou infinie. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que cette limite est infinie.

Supposons par l'absurde que cette limite est finie et posons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 - u_n + 1) = l^2 - l + 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  donc par unicité de la limite :

$$l^2 - l + 1 = l$$

donc  $l^2 - 2l + 1 = 0$ , i.e.  $(l - 1)^2 = 0$  donc  $l = 1$ . Mais  $(u_n)$  est croissante et  $u_0 = \frac{3}{2}$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq \frac{3}{2}$  et puisque  $(u_n)$  converge vers  $l$ , par passage à la limite,  $l \geq \frac{3}{2}$ , donc  $1 \geq \frac{3}{2}$ , ce qui est absurde.

Donc cette limite est infinie,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**3a** Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4} \\ u_2 &= \frac{49}{16} - \frac{7}{4} + 1 = \frac{37}{16} \end{aligned}$$

**3b** Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ .

Quel résultat cette inégalité permet-elle de retrouver ?

Montrons par récurrence sur  $n \geq 2$  que  $u_n \geq n$ .

- Initialisation :  $n = 2, u_2 = \frac{37}{16} \geq 2$ .
- Hérédité : soit  $n \geq 2$ . On suppose  $u_n \geq n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 - u_n + 1 = u_n(u_n - 1) + 1 \\ &\geq n(n-1) + 1 \text{ (on multiplie des inég à termes **positifs**)} \end{aligned}$$

Or :

$$n(n-1) + 1 - (n+1) = n^2 - 2n = n(n-2) \geq 0 \text{ car } n \geq 2$$

donc :

$$u_{n+1} \geq n+1$$

- Donc par récurrence sur  $n \geq 2$ , pour tout  $n \geq 2, u_n \geq n$ . Mais ceci est aussi vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$  car  $u_0 = \frac{3}{2} \geq 0$  et  $u_1 = \frac{7}{4} \geq 1$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ .

**4a** Exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  uniquement en fonction de  $u_n$  la quantité :

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}.$$

On a :

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_n^2 - u_n} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1 - u_n}{u_n^2 - u_n} = -\frac{1}{u_n}$$

**4b** En déduire une expression simplifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}.$$

On a donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

**Exercice 6 :** Résoudre l'équation suivante d'inconnue complexe  $z$  :

$$(E) : z^6 + (1 - 3i)z^3 - 4 = 0$$

Posons  $Z = z^3$  et résolvons  $(E') : Z^2 + (1 - 3i)Z - 4 = 0$ , trinôme du second degré de discriminant  $\Delta = (1 - 3i)^2 + 16 = 8 - 6i$ .

Cherchons les racines carrées de  $\Delta$  sous la forme  $\delta = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = -\frac{a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \delta = \pm (3 - i) \end{aligned}$$

donc les solutions de  $(E')$  sont  $Z_1 = \frac{3i-1+3-i}{2} = 1+i$  et  $Z_2 = \frac{3i-1-3+i}{2} = -2+2i$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} z^6 + (1-3i)z^3 - 4 &= 0 \Leftrightarrow Z^2 + (1-3i)Z - 4 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1+i \text{ ou } z^3 = -2+2i \\ \Leftrightarrow z^3 &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ ou } z^3 = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4} \\ \Leftrightarrow z &= 2^{1/6}e^{i\pi/12} \text{ ou } z = 2^{1/6}je^{i\pi/12} \text{ ou } z = 2^{1/6}j^2e^{i\pi/12} \\ \text{ou } z &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ ou } z = \sqrt{2}je^{i\pi/4} \text{ ou } z = \sqrt{2}j^2e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

où  $j = e^{2i\pi/3}$ .

**Exercice 7 :** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . On pose  $a = z$ ,  $b = \bar{z}$  et  $c = \frac{z^2}{\bar{z}}$ .

On munit le plan d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et on note  $A, B$  et  $C$  les points images de  $a, b$  et  $c$ .

**1** Soit  $\rho$  le module de  $z$  et  $\theta$  un argument de  $z$ .

Donner les écritures trigonométriques de  $a, b$  et  $c$  en fonction de  $\rho$  et  $\theta$ .

On a :

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad b = \rho e^{-i\theta} \text{ et } c = \frac{\rho^2 e^{2i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = \rho e^{3i\theta}$$

**2** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\rho$  et  $\theta$  pour que :

(a) les points  $A$  et  $B$  soient distincts;

(b) les points  $A$  et  $C$  soient distincts;

(c) les points  $B$  et  $C$  soient distincts.

Les affixes de ces trois points ont même module donc les points sont distincts si et seulement si leurs arguments sont distincts modulo  $2\pi$  donc :

$$A \text{ et } B \text{ sont distincts} \Leftrightarrow \theta \neq -\theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta \neq 0 \quad [\pi]$$

$$A \text{ et } C \text{ sont distincts} \Leftrightarrow \theta \neq 3\theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta \neq 0 \quad [\pi]$$

$$B \text{ et } C \text{ sont distincts} \Leftrightarrow -\theta \neq 3\theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta \neq 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

**3** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les points  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux distincts. On suppose désormais que cette condition est réalisée.

Donc  $A, B$  et  $C$  sont deux à deux distincts si et seulement si  $\theta \neq 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]$ .

**4** Montrer que  $AB = AC$ .

On a :

$$\begin{aligned} AB &= |b - a| = |\rho(e^{-i\theta} - e^{i\theta})| \\ AC &= |c - a| = |\rho(e^{3i\theta} - e^{i\theta})| = \rho |e^{2i\theta}| |e^{i\theta} - e^{-i\theta}| = \rho |e^{-i\theta} - e^{i\theta}| = AB \end{aligned}$$

- 5** Placer le point  $A$  dans le plan (n'importe où hors de  $O$ ). Construire le point  $B$  puis le point  $C$ . On laissera les traits de construction et on justifiera les étapes à l'aide des résultats des questions précédentes.

On place  $A$  sur un point quelconque différent de  $O$ . On place  $B$  le symétrique de  $A$  par rapport à l'axe des abscisses. On trace le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ . On place  $C$  sur l'intersection de ce cercle avec le cercle de centre  $A$  et de rayon  $AB$ .

**6** On pose  $Z = \frac{c-a}{c-b}$ .

- 6a** Montrer que  $Z = f(\theta) e^{i\theta}$  où  $f(\theta)$  est une expression de  $\theta$  que l'on précisera.

On a :

$$Z = \frac{c-a}{c-b} = \frac{\rho e^{3i\theta} - \rho e^{i\theta}}{\rho e^{3i\theta} - \rho e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{e^{i\theta} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})} = e^{i\theta} \frac{2i \sin(\theta)}{2i \sin(2\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\sin(2\theta)} e^{i\theta}$$

- 6b** Résoudre l'équation  $|Z| = 1$  d'inconnue  $\theta$ .

On a :

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} \right| = 1 \Leftrightarrow |2 \cos(\theta)| = 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = \pm \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \frac{\pi}{3} \right] \text{ car } \theta \neq 0 \left[ \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

- 7** Déterminer l'ensemble des points du plan en-lesquels placer le point  $A$  pour que le triangle  $ABC$  soit équilatéral.

Compte tenu de  $AC = BC$ , on a :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow AC = BC \Leftrightarrow |Z| = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} \left[ \frac{\pi}{3} \right].$$

Compte tenu de  $\theta \neq 0 \left[ \frac{\pi}{2} \right]$ , les points  $A$  pour-lesquels le triangle  $ABC$  est équilatéral sont ceux d'affixes ayant pour argument  $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  ou  $-\frac{2\pi}{3}$ .

Dit autrement, ce sont les points situés sur les droites  $(OM)$  et  $(ON)$  où  $M$  et  $N$  sont les points d'affixes  $j$  et  $j^2$ .