D.S.2 samedi 19 Octobre 2024

Cours : questions indépendantes vues en cours.

1 Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2 Calculer les limites des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$:

2a $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

2b $g(x) = e^x - x^2$.

2c $h(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$.

3 On pose $f(x) = x^x$. Déterminer l'ensemble de définition de f. La prolonger par continuité. Enfin, étudier sa dérivabilité en tout point de son nouvel ensemble de définition, et préciser le cas échéant $f'(x)$.

Exercice 1 : Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1a Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

1b En déduire l'expression en fonction de n de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2.$$

2 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

2a Calculer en fonction de n et de a la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right).$$

2b Montrer : $\left\{\omega^k : k \in [|0, n-1|]\right\} = \left\{\omega^{-j} : j \in [|0, n-1|]\right\}$.

2c En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|b + \omega^k a\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

2d Déduire des questions précedentes l'inégalité :

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

Exercice 2 : On considère les fonctions réelles f et g d'une variable réelle définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \arctan(\sinh(x)) \text{ et } g(x) = \arctan\left(\frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\right).$$

1 Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et g.

2 Calculer les fonctions dérivées de f et g.

3 En déduire $f = g$.

4 Calculer $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.

5 Déduire de ce qui précède la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Problème: polynômes de Tchebytchev :

On demande une rédaction soignée et des calculs clairs et lisibles.
Les questions sont dans une large mesure indépendante les unes des autres. On peut de toutes façons toujours admettre le résultat d'une question pour la suite.
Soit n un entier naturel. On considère la fonction :

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$

Question 1 : étude de g_n :

1a Déterminer l'ensemble de définition de g_n.

1b Montrer que si n est pair, alors g_n est paire et si n est impair, alors g_n est impaire.

1c Expliciter $g_2(x)$ et $g_3(x)$ (le résultat ne doit plus faire apparaître de racines carrées).

1d Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a: $\boxed{g_{n+1}(x) + g_{n-1}(x) = 2x g_n(x)}$ (pour tout x pour lequel ces fonctions sont définies).

1e Montrer plus généralement que pour n quelconque, $g_n(x)$ peut s'écrire sous la forme:

$$g_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} x^{n-2p} \left(x^2-1\right)^p.$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$.
On définit à présent pour tout entier naturel n une fonction notée T_n et définie sur $\mathbb{R}$ par les conditions suivantes:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x \text{ et pour } n \geq 1, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

L'étude des fonctions T_n et de quelques applications est l'objet de la fin du problème.

Question 2 : étude de T_n :

2a Déterminer $T_n(0)$ en fonction de n.

2b Justifier brièvement que les fonctions g_n et T_n coïncident sur l'ensemble de définition de g_n.

2c Montrer que pour tout n, $T_n(x)$ est une fonction polynômiale de la forme

$$T_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n-1,n}x^{n-1} + \cdots + a_{1,n}x + a_{0,n}$$

où $a_{n,n}, a_{n-1,n}, \ldots a_{0,n}$ sont des coefficients réels que l'on ne cherchera pas à expliciter.

2d Trouver une relation simple qui donne $a_{n+1,n+1}$ en fonction de $a_{n,n}$ pour $n \geq 1$. En déduire la valeur de $a_{n,n}$ en fonction de n.

Question 3 : dérivées de T_n.

3a Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, on a: $T_{n+1}^{(p)}(x) = 2xT_n^{(p)}(x) + 2pT_n^{(p-1)}(x) - T_{n-1}^{(p)}(x)$. (on rappelle que $T_n^{(p)}$ désigne la dérivée $p\_ième$ de T_n).

3b Pour $n \geq 1$, justifier que $T_{n-1}^{(n+1)}(0) = 0$. Exprimer alors $T_{n+1}^{(n+1)}(0)$ en fonction de $T_n^{(n)}(0)$ puis en fonction de n.

3c En utilisant l'expression de $T_n(x)$ donnée en $2.b.$, exprimer $T_n^{(n)}(0)$ en fonction de $a_{n,n}$ et de n. Retrouvez-vous ainsi la valeur de $a_{n,n}$ en fonction de n ?

Question 4 : calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

4a Vérifier que $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

4b Résoudre l'équation $T_5(x) = 0$.

4c Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, on a: $\boxed{T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$

4d Calculer $T_5\left(\cos\left(\frac{k\pi}{10}\right)\right)$ pour $k = 1, 3, 5, 7$ et 9.

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et donner sans plus de justification la valeur de $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Question 5 : étude de l'équation $T_n(x) = 0$.

5a Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$ pour $\underline{\theta \in [0, \pi]}$.

5b En déduire que l'équation $T_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-1, 1]$ exactement n solutions distinctes que l'on précisera.

5c On fixe un réel $x > 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(x) \geq T_n(x)$.

5d En déduire que l'équation $T_n(x) = 0$ n'admet pas de solution en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 1 : Soit $b \geq 2$ tel que $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1a Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

On sait que $\omega^0, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ sont les n raciines n-ièmes de l'unité et que leur somme est nulle (facile à redémontrer d'ailleurs) donc $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ donc $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Re}\left(\omega^k\right) = 0$. Or $\mathrm{Re}\left(\omega^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ik\pi/n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$.

1b En déduire l'expression en fonction de n de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{2ik\pi/n} - 1\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\
&= 2n + 2\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 2n.
\end{aligned}$$

2 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

2a Calculer en fonction de n et de a la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right).$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) b = na + 0 \times b = na.$$

2b Montrer : $\left\{\omega^k : k \in [|0, n-1|]\right\} = \left\{\omega^{-j} : j \in [|0, n-1|]\right\}$.
D'abord, soit $k \in [|0, n-1|]$, on a :

$$\omega^k = e^{2ik\pi/n} = e^{2ik\pi/n - 2i\pi} = e^{-2i(n-k)\pi/n} = e^{-2ij\pi/n} = \omega^{-j}$$

avec $j = n - k$ ce qui équivaut à $k = n - j$ et de plus :

$$0 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow 1 - n \leq -k \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq j \leq n.$$

Donc $\left\{\omega^k : k \in [|0, n-1|]\right\} = \{\omega^{-j} : j \in [|1, n|]\}$.
Mais on a aussi $\omega^{-n} = 1 = \omega^{-0}$ donc $\{\omega^{-j} : j \in [|1, n|]\} = \{\omega^{-j} : j \in [|0, n-1|]\}$.
Donc $\left\{\omega^k : k \in [|0, n-1|]\right\} = \{\omega^{-j} : j \in [|0, n-1|]\}$.

2c En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|b + \omega^k a\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|b + \omega^k a\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k \left(\omega^{-k} b + a\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k\right| \left|\left(\omega^{-k} b + a\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left(\omega^{-k} b + a\right)\right| \text{ car } \left|\omega^k\right| = 1$$

donc en utilisant $\left\{\omega^k : k \in [|0, n-1|]\right\} = \{\omega^{-j} : j \in [|1, n|]\}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|b + \omega^k a\right| = \sum_{j=0}^{n-1} \left|\left(a + \omega^{-j} b\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

2d Déduire des questions précedentes l'inégalité :

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

On a d'après 2a :

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right) \text{ donc } |a| = \frac{1}{n} \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \omega^k b\right)\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|$$

et de même

$$|b| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|b + \omega^k a\right| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right| \quad \text{en utilisant } 2c$$

donc :

$$|a| + |b| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right| = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k b\right|.$$

Exercice 2 : On considère les fonctions réelles f et g d'une variable réelle définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \arctan(\sinh(x)) \text{ et } g(x) = \arctan\left(\frac{\sinh(x)}{1 + \cosh(x)}\right).$$

1 Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et g.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Idem pour g avec un quotient en plus sachant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + \cosh(x) \neq 0$ car $\cosh(x) \geq 1$.

2 Calculer les fonctions dérivées de f et g.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{\cosh(x)}{1+\sinh^2(x)} = \frac{1}{2}\frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{2\cosh(x)} \\ g'(x) &= \frac{(1+\cosh(x))\cosh(x) - \sinh^2(x)}{(1+\cosh(x))^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\right)^2} \end{aligned}$$

3 En déduire $f = g$.

Simplifions g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cosh(x)+1}{(1+\cosh(x))^2 + \sinh^2(x)} = \frac{\cosh(x)+1}{1+2\cosh(x) + +\cosh^2(x) + \cosh^2(x) - 1} \\ &= \frac{\cosh(x)+1}{2\cosh(x)(\cosh(x)+1)} = \frac{1}{2\cosh(x)} = f'(x) \end{aligned}$$

f et g ont même dérivée sur un **intervalle** donc diffèrent d'une constante. Or $f(0) = \frac{1}{2}\arctan(0) = 0$ et $g(0) = \arctan(0) = 0$ donc $f = g$.

4 Calculer $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.

On a :

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

et :

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

5 Déduire de ce qui précède la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \\ g\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/3}{1+2\sqrt{3}/3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right) = \arctan\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}\right) = \arctan\left(2-\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

et $f = g$ donc $\frac{\pi}{12} = \arctan\left(2-\sqrt{3}\right)$. Donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\arctan\left(2-\sqrt{3}\right)\right) = 2-\sqrt{3}.$$

Corrigé du problème: polynômes de Tchebytchev.

$$\boxed{g_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right).}$$

1.a.) $g_n(x)$ est définie lorsque $x^2 \geq 1$ c'est-à dire pour $x \leq -1$ et $x \geq 1$.

1.b.) Si n est pair, alors :

$$\begin{aligned} g_n(-x) &= \frac{1}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) = g_n(x) \end{aligned}$$

donc g_n est paire.

Si n est impair, alors :

$$\begin{aligned} g_n(-x) &= \frac{1}{2}\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) = -g_n(x) \end{aligned}$$

donc g_n est impaire.

1.c.)

$$g_2(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+x^2-1+x^2+x^2-1\right) = 2x^2-1.$$

et

$$\begin{aligned} g_3(x) &= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^3+3x^2\sqrt{x^2-1}+3x\left(x^2-1\right)+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3+x^3-3x^2\sqrt{x^2-1}+3x\left(x^2-1\right)-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3\right) \\ &= 4x^3-3x. \end{aligned}$$

1.d.) On a:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x)+g_{n-1}(x) &= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} \\ +\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1\right) \\ +\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2+1\right) \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+1\right) \\ +\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+1\right) \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right] \\ &= 2x\frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) = 2xg_n(x). \end{aligned}$$

1.e.)

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(-1)^k\left(x^2-1\right)^{k/2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2}\left(1+(-1)^k\right)\right)=\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^2-1\right)^{k/2}
\end{aligned}$$

car $1+(-1)^k$ est nul pour k impair et vaut 2 pour k pair.

En posant $k=2p$ on a donc $p \leq n/2$ donc puisque p est entier, $p \leq \lfloor n/2 \rfloor$ et il vient $g_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2p}x^{n-2p}\left(x^2-1\right)^p$.

$$\boxed{T_0(x)=1, T_1(x)=x \text{ et pour } n\geq 1, T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)}.$$

Question 2:

2.a.) D'après cette relation, on a pour tout n, $T_{n+1}(0)=-T_{n-1}(0)$.

Donc pour n impair, $n=2p+1$, posons $u_p=T_{2p+1}(0)$, on a pour tout $p\geq 1$:

$$u_p=T_{2p+1}(0)=-T_{2p-1}(0)=-u_{p-1}$$

donc (u_p) est géométrique de raison -1 donc :

$$T_{2p+1}(0)=u_p=(-1)^p u_0=(-1)^p T_1(0)=0$$

Et pour n pair, $n=2p$, $p\in\mathbb{N}$, posons $v_p=T_{2p}(0)$, on a pour tout $p\geq 1$:

$$v_p=T_{2p}(0)=-T_{2p-2}(0)=-v_{p-1}$$

donc de même :

$$T_{2p}(0)=v_p=(-1)^p v_0=(-1)^p T_0(0)=(-1)^p$$

2.b.) On calcule facilement $g_0(x)=1=T_0(x)$ et $g_1(x)=x=T_1(x)$.

Les fonctions suivantes sont alors déterminées par la même relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$ et $g_{n+1}(x)=2xg_n(x)-g_{n-1}(x)$ donc sont égales: $g_2=T_2$, $g_3=T_3$ etc...

2.c.) Montrons-le par récurrence double sur n :

- Initialisation : si $n=0$ ou 1, c'est vrai ($T_0(x)=1$ et $T_1(x)=x$).
- Hérédité :Soit $n\geq 1$, supposons la propriété vraie pour n et $n-1$. Alors :

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\\
&= 2x\left(a_{n,n}x^n+a_{n-1,n}x^{n-1}+\cdots+a_{1,n}x+a_{0,n}\right)-\left(a_{n-1,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1,n-1}x+a_{0,n-1}\right)
\end{aligned}$$

ce qui après développement et regroupement est bien de la forme $a_{n+1,n+1}x^{n+1}+a_{n,n+1}x^n+\cdots+a_{1,n+1}x+a_{0,n+1}$.

Ceci achève le raisonnement.

2.d.) On constate en particulier en regardant le coefficient de x^{n+1} ci-dessus que $a_{n+1,n+1}=2a_{n,n}$ (pour $n\geq 1$).

La suite $a_{n,n}$ est donc géométrique de raison 2 donc $a_{n,n}=2^{n-1}a_{1,1}=2^{n-1}$ (**attention**:la relation $a_{n+1,n+1}=2a_{n,n}$ ne vaut pas pour $n=0$).

Question 3:

3.a.) Montrons-le par récurrence sur $p\geq 1$:

- Init. : Si $p=1$, on a :

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\text{ donc }T'_{n+1}(x)=2xT'_n(x)+2T_n(x)-T'_{n-1}(x).$$

- Hérédité : Soit $p\geq 1$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $T^{(p)}_{n+1}(x)=2xT^{(p)}_n(x)+2pT^{(p-1)}_n(x)-T^{(p)}_{n-1}(x)$. alors en dérivant il vient:

$$\begin{aligned}T^{(p+1)}_{n+1}(x)&=2xT^{(p+1)}_n(x)+2T^{(p)}_n(x)+2pT^{(p)}_n(x)-T^{(p+1)}_{n-1}(x)\\&=2xT^{(p+1)}_n(x)+2(p+1)T^{(p)}_n(x)-T^{(p+1)}_{n-1}(x)\end{aligned}$$

ce qui achève le raisonnement.

3.b.) D'après la question 2.b, T_{n-1} est polynômiale de degré $n-1$ donc, après n dérivations (ou plus), c'est la fonction nulle donc $T^{(n+1)}_{n-1}(0)=0$.

Il en résulte :

$$T^{(n+1)}_{n+1}(0)=2(n+1)T^{(n)}_n(0)-T^{(n+1)}_{n-1}(0)=2(n+1)T^{(n)}_n(0)$$

donc (faire une récurrence si nécessaire) $T^{(n+1)}_{n+1}(0)=2^n(n+1)!T'_1(0)=2^n(n+1)!$

3.c.) $T_n(x)=a_{n,n}x^n+a_{n-1,n}x^{n-1}+\cdots+a_{1,n}x+a_{0,n}$ donc après n dérivations, il reste seulement $T^{(n)}_n(x)=a_{n,n}n!$ donc $T^{(n)}_n(0)=a_{n,n}n!$

Ainsi, $a_{n,n}n!=2^{n-1}n!$ donc on retrouve $a_{n,n}=2^{n-1}$.

Question 4:

4.a.) On connaît dejà T_0,T_1,T_2 et T_3 (question 1), on calcule ensuite $T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)=8x^4-8x^2+1$ puis $T_5(x)=2xT_4(x)-T_3(x)=16x^5-20x^3+5x$ (à détailler).

4.b.)

$$T_5(x)=0\iff 16x^5-20x^3+5x=0\iff x\left(16x^4-20x^2+5\right)=0\iff x=0\text{ ou }16x^4-20x^2+5=0.$$

On pose $y=x^2$ (équation bicarrée) et on trouve pour $16y^2-20y+5=0$, $\Delta=\left(4\sqrt{5}\right)^2$ donc $y=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ (toujours positif) donc $x=0$ ou $x=\pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$ (soit 5 solutions).

4.c.) Montrons-le par récurrence double:

- Init. : Si $n=0$ $T_0(\cos(\theta))=1=\cos(0.\theta)$ et si $n=1$ $T_1(\cos(\theta))=\cos(\theta)$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n-1)\theta)$.
  Alors on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\, T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\
&= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - (\cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)) = \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta)
\end{aligned}$$

ce qui achève le raisonnement.

4.d.) Pour $k = 1, 3, 5, 7$ et 9, on a $T_5\left(\cos\left(\frac{k\pi}{10}\right)\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)$, et $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ sont 5 solutions de l'équation $T_5(x) = 0$. Elle sont deux à deux distinctes car cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. La plus grande est donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et c'est donc aussi la plus grande solution trouvée en 4.*b*. Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. De même on obtient $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

<u>Question 5:</u>

5.a.) On a $\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Si l'on cherche $\theta \in [0,\pi]$, alors $0 \le \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \le \pi \iff -\frac{\pi}{2n} \le \frac{k\pi}{n} \le \pi - \frac{\pi}{2n}$
$\iff -\frac{1}{2} \le k \le n - \frac{1}{2} \iff 0 \le k \le n-1$ car k est entier.

Les solutions cherchées sont donc $\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

5.b.) Pour $x \in [-1,1]$, on peut poser $\theta = \arccos(x)$ et on a $x = \cos(\theta)$ et $\theta \in [0,\pi]$ et donc

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= 0 \iff T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\
&\iff x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ et car } \theta \in [0,\pi].
\end{aligned}$$

Ces n solutions sont 2 à 2 distinctes car cos est strictement décroissante (donc injective) sur $[0,\pi]$.

5.c.) On fixe un réel $x > 1$ et on fait une récurrence avec prédécesseurs :

- Init. : Si $n = 0$, $T_1(x) = x \ge 1 = T_0(x)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [|0,n|]$: $T_k(x) \ge T_{k-1}(x)$.
  Alors $T_n(x) \ge T_0(x) = 1 > 0$ donc $2xT_n(x) \ge 2T_n(x)$ (car $x > 1$) donc $2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \ge 2T_n(x) - T_{n-1}(x) \ge T_n(x)$ car $T_n(x) \ge T_{n-1}(x)$. Ainsi, $T_{n+1}(x) \ge T_n(x)$, ce qui achève le raisonnement.

5.d.) On a donc $T_n(x) \ge T_0(x) = 1 > 0$ pour $x > 1$.

Enfin, T_n est toujours soit paire, soit impaire, du moins sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ (car elle coïncide avec g_n), donc elle ne peut pas non plus s'annuler sur $]-\infty,-1]$.

Ainsi, l'équation $T_n(x) = 0$ n'admet pas de solution en dehors de l'intervalle $[-1,1]$.