D.S.3 samedi 23 Novembre 2024 (2h30)

Exercice 1 :

1 Linéariser $\sin^2(x)\cos^4(x)$.

2 En déduire $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx$.

Exercice 2 :

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = (x+1)\,e^{-x}$ (indication : pour trouver une solution particulière, on pourra poser $y = ze^{-x}$).

2 Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{1}{x^3}\dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

3 Montrer que la suite (u_n) est convergente.
Dans la dernière question, on pose $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $v_n = u_n^2$.

4a Exprimer v_n en fonction de n (indication : on pourra calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$).

4b En déduire la valeur de l.

Exercice 4 : Un calcul d'intégrale. On pose $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$. On se propose de calculer I par deux méthodes différentes.

Première méthode :

1a Faire le changement de variable $x = \tan(\theta)$.

1b Continuer par un changement de variables de la forme $t = a + b\theta$ où a et b sont des réels que vous choisirez soigneusement.

1c Simplifier et en déduire la valeur de I.

Deuxième méthode :

2a Poser dans I le changement de variables $x = \dfrac{1-t}{1+t}$.

2b Simplifier et en déduire la valeur de I.

Exercice 5 : Comme dans tout problème, on peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite et *les calculs doivent être détaillés.*

On entreprend ici l'étude de la suite de Fibonacci (F_n) définie par :

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

1 Montrer que la suite (F_n) est croissante.

2 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

3 Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{F_k}{F_{k+2}} \geq \dfrac{1}{5}$. (on pourra procéder par une récurrence soigneusement rédigée).

4 Application à la série harmonique. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ W_n &= H_{F_{n+2}} \end{aligned}$$

4a Montrer que la suite (H_n) est croissante.

4b Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$F_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k$$

4c On souhaite montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$W_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i}.$$

4ci Vérifier soigneusement cette formule pour $n = 1$, pour $n = 2$ et pour $n = 3$ (tous les calculs doivent être détaillés, ce qui vaut d'ailleurs en toute généralité).

4cii Démontrer cette formule pour tout $n \geq 1$.

4d En déduire que :

$$W_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{F_{k+2}}$$

4e En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 1 :

1 Linéariser $\sin^2(x)\cos^4(x)$.

On a $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ donc on calcule :

$$\begin{array}{rcl}
\sin^2(x)\cos^4(x) & = & \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
& = & \dfrac{-1}{2^6}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \\
& = & \dfrac{-1}{2^6}\left(\begin{array}{c} e^{6ix}+4e^{4ix}+6e^{2ix}+4+e^{-2ix}-2e^{4ix}-8e^{2ix}-12-8e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{2ix} \\ +4+6e^{-2ix}+4e^{-4ix}+e^{-6ix}\end{array}\right) \\
& = & \dfrac{-1}{2^6}\left(\begin{array}{c} 2\cos(6x)+8\cos(4x)+12\cos(2x)+8+2\cos(2x) \\ -4\cos(4x)-16\cos(2x)-12\end{array}\right) \\
& = & \dfrac{-1}{2^6}\left(2\cos(6x)+4\cos(4x)-2\cos(2x)-4\right) \\
& = & \dfrac{-1}{2^5}\left(\cos(6x)+2\cos(4x)-\cos(2x)-2\right)
\end{array}$$

$\sin^2(x)\cos^4(x) = \dfrac{1}{32}\cos 2x - \dfrac{1}{16}\cos 4x - \dfrac{1}{32}\cos 6x + \dfrac{1}{16}$

2 En déduire $\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\cos^4(x)\,dx$.

On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\cos^4(x)\,dx & = & \dfrac{-1}{2^5}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\cos(6x)+2\cos(4x)-\cos(2x)-2\right)dx \\
& = & \dfrac{-1}{2^5}\left[\dfrac{\sin(6x)}{6}+\dfrac{\sin(4x)}{2}-\dfrac{\sin(2x)}{2}-2x\right]_0^{\pi/2} \\
& = & \dfrac{-1}{2^5}\left[0+0-0-\pi-0-0+0+0\right] = \dfrac{\pi}{32}
\end{array}$$

$\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\cos^4(x)\,dx = \dfrac{1}{32}\pi$

Exercice 2 :

1 Résoudre dans R l'équation différentielle $y''+2y'+5y=(x+1)e^{-x}$.

C'est une équation différentielle linéaire du second à coeficients constants et second membre polynome-exponentiel.

On définit l'équation homogène associée (E_0) : $y''+2y'+5y=0$ d'équation caractéristique (eq) : $r^2+2r+5=0$.

$\Delta=-16$, $r=\dfrac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$.

Solution générale de (E_0): $x\longmapsto e^{-x}\left(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)\right), (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

On pose $y=ze^{-x}$. On a donc $y'=(z'-z)e^{-x}$ et $y''=(z''-2z'+z)e^{-x}$

y vérifie (E) si et seulement si $(z''-2z'+z)+2(z'-z)+5z=x+1$

soit $z''+4z=x+1$: (E').

$z=\frac{1}{4}(x+1)$ est solution de (E') donc la solution générale de (E) est $x\longmapsto\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}+e^{-x}\left(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)\right)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2 Résoudre sur $]0,1[$ l'équation $y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^3}\frac{1}{1-x^2}$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée est $(E_0) : y' + \frac{3}{x}y = 0$.

On pose $a(x) = \frac{3}{x}$, $A(x) = \int a(x)dx = 3\ln(x)$.

Solution générale de (E_0) : $y(x) = \lambda e^{-3\ln(x)} = \frac{\lambda}{x^3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Méthode de variation de la constante: on pose $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x^3}$.

$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^3} - 3\frac{\lambda(x)}{x^4}$ d'où :

$$\begin{aligned} y' + \frac{3}{x}y &= \frac{1}{x^3}\frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{x^3} - 3\frac{\lambda(x)}{x^4} + \frac{3}{x}\frac{\lambda(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3}\frac{1}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right). \end{aligned}$$

On choisit $\lambda(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ car $x \in]0,1[$.

Ainsi, $y(x) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2x^3}$ est une solution particulière de (E).

Solution générale de (E) : $y(x) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2x^3} + \frac{\lambda}{x^3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$.

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- I.: $n = 0$, $u_n = 1 \geq 1$ OK.
- H.: soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \geq 1$. Alors $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.
- Conc.: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Puisque $u_n \geq 0$, on a $u_n = \sqrt{u_n^2}$ donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} - \sqrt{u_n^2} \geq 0$ car $u_n^2 + \frac{1}{2^n} \geq u_n^2 \geq 0$.

De plus :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \leq u_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow u_n^2 + \frac{1}{2^n} \leq \left(u_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \text{ car tout est positif} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}u_n + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \end{aligned}$$

4

et cette dernière inégalité est vraie car $u_n \geq 1$ donc $\frac{1}{2^n}u_n \geq \frac{1}{2^n}$ donc $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}u_n + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

2b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}, .u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on somme ces inégalités de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

i.e. par télescopage (somme de gauche) et réindiçage (somme de droite) :

$$u_n - u_0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

3 Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On a donc :

$$\begin{aligned} u_n &\leq u_0 + \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} \\ &\leq 1 + 1 - \frac{1}{2^n} \leq 2 \end{aligned}$$

donc (u_n) est majorée. Or d'après 2a, elle est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente.

Dans la dernière question, on pose $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $v_n = u_n^2$.

4a Exprimer v_n en fonction de n (indication : on pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$).

On a par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-1/2^n}{1-1/2}$$

donc $v_n = v_0 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

4b En déduire la valeur de l.

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$ car $u_n \geq 0$ donc $u_n = \sqrt{v_n}$.

Corrigé de l'exercice 4 : On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$. On se propose de calculer I par deux méthodes différentes.

Première méthode :

1a Faire le changement de variable $x = \tan(\theta)$.

On a $dx = (1 + \tan^2(\theta))\, d\theta$ d'où

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan(\theta))}{1+\tan^2(\theta)} \left(1+\tan^2(\theta)\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(\theta))\, d\theta.$$

1b Continuer par un changement de variables de la forme $t = a + b\theta$ où a et b sont des réels que vous choisirez soigneusement.

On pose $t = \dfrac{\pi}{4} - \theta$ d'où $d\theta = -dt$ et

$$I = -\int_{\pi/4}^{0} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt$$

1c Simplifier et en déduire la valeur de I.

Donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(t)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(t)}\right) dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan(t)}{1+\tan(t)}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan(t)}\right) dt = \int_0^{\pi/4} \ln(2)\, dt - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))\, dt \\ &= \ln(2)\frac{\pi}{4} - I \end{aligned}$$

d'où $2I = \ln(2)\dfrac{\pi}{4}$ et $I = \dfrac{\pi\ln(2)}{8}$.

Deuxième méthode :

2a Poser dans I le changement de variables $x = \dfrac{1-t}{1+t}$.

On a cette fois $dx = -\dfrac{2}{(1+t)^2}dt$. De plus, $1 + x = \dfrac{2}{1+t}$ et $1 + x^2 = \dfrac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}$ d'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}} \left(-\frac{2}{(1+t)^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(2)}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{\ln(2)}{1+t^2} dt - I \end{aligned}$$

2b Simplifier et en déduire la valeur de I.

Donc $2I = \int_0^1 \dfrac{\ln(2)}{1+t^2} dt = [\ln(2)\arctan(t)]_0^1 = \ln(2)\left(\dfrac{\pi}{4} - 0\right)$ d'où $I = \dfrac{\pi\ln(2)}{8}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Comme dans tout problème, on peut admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite.

On entreprend ici l'étude de la suite de Fibonacci (F_n) définie par :

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

1 Montrer que la suite (F_n) est croissante.

Il y a différentes façons de procéder. On peut par exemple commencer par prouver par récurrence double que pour tout n, $F_n \geq 0$ puis calculer $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n \geq 0$ pour conclure. Autre possibilité : prouvons directement par récurrence double que $F_{n+1} \geq F_n$:

- Init.: $n = 1$ et $n = 2$: $F_2 \geq F_1$ et $F_3 = 2 \geq F_2$.
- Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons $F_{n+1} \geq F_n$ et $F_{n+2} \geq F_{n+1.}$ Alors :
$$F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2} \geq F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$$
- Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} \geq F_n$.
Donc la suite (F_n) est croissante.

2 Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = +\infty$.

Il y a encore de très nombreuses façons de procéder. Par exemple, on peut utiliser le théorème de la limite monotone puis supposer par l'absurde que la limite l est finie. Et en passant à la limite dans la relation de récurrence, obtenir $l = 2l$ donc $l = 0$. Mais c'est absurde car $F_1 = 1$ et (F_n) est croissante donc $l \geq 1$.
Ou prouver par récurrence double que pour tout $n \geq 1$, $F_n \geq n-1$. Puis conclure par théorème de comparaison.
Dans tous les cas, tout doit être soigneusement rédigé, justifié et les théorèmes cités et leurs hypothèses vérifiées.

3 Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{F_k}{F_{k+2}} \geq \dfrac{1}{5}$. (on pourra procéder par une récurrence soigneusement rédigée).

Montrons ceci par récurrence double sur $k \geq 1$:

- Init. : $k = 1$ et $k = 2$: $\dfrac{F_1}{F_3} = \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{F_2}{F_4} = \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{5}$.
- Hérédité : soit $k \geq 1$. Supposons $\dfrac{F_k}{F_{k+2}} \geq \dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{F_{k+1}}{F_{k+3}} \geq \dfrac{1}{5}$. Alors :
$$0 < \frac{F_{k+4}}{F_{k+2}} = \frac{F_{k+2} + F_{k+3}}{F_{k+2}} = \frac{2F_{k+2} + F_{k+1}}{F_{k+2}} = 2 + \frac{F_{k+1}}{F_{k+2}} \leq 3 \text{ car } 0 < F_{k+1} \leq F_{k+2}$$
donc $\dfrac{F_{k+2}}{F_{k+4}} \geq \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{5}$.
- Conclusion : pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{F_k}{F_{k+2}} \geq \dfrac{1}{5}$.

4 Application à la série harmonique. Pour $n \geq 1$, on pose :
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$W_n = H_{F_{n+2}}$$

4a Montrer que la suite (H_n) est croissante.

Soit $n \geq 1$, $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc (H_n) est croissante.

4b Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$F_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k$$

Montrons cette propriété par récurence (simple !) sur $n \geq 1$:

- Init.: $n = 1$, $F_3 = 2$ et $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} F_k = 1 + F_1 = 2 = F_3$.
- Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons $F_{n+2} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} F_k$. Alors :

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} F_k$$

- Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, $F_{n+2} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} F_k$.

4c On souhaite montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$W_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i}.$$

4ci Vérifier soigneusement cette formule pour $n = 1$, pour $n = 2$ et pour $n = 3$ (tous les calculs doivent être détaillés, ce qui vaut d'ailleurs en toute généralité).

- Pour $n = 1$, $W_n = W_1 = H_{F_3} = H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} = 1 + \sum\limits_{i=F_2+1}^{F_3} \frac{1}{i} = 1 + \sum\limits_{i=2}^{2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ donc la formule est juste pour $n = 1$.
- Pour $n = 2$, $W_n = W_2 = H_{F_4} = H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ tandis que :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} &= 1 + \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=F_2+1}^{F_3} \frac{1}{i} + \sum_{i=F_3+1}^{F_4} \frac{1}{i} \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{2} \frac{1}{i} + \sum_{i=3}^{3} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = W_n \end{aligned}$$

  donc la formule est vraie pour $n = 2$.

4cii Démontrer cette formule pour tout $n \geq 1$.
On procède par récurrence sur n et on vient de faire l'initialisation ($n = 1$ est d'ailleurs suffisant à cet égard).

Soit $n \geq 1$ tel que $W_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i}$. Alors :

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= H_{F_{n+3}} = \sum_{i=1}^{F_{n+3}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{F_{n+2}} \frac{1}{i} + \sum_{i=F_{n+2}+1}^{F_{n+3}} \frac{1}{i} = W_n + \sum_{i=F_{n+2}+1}^{F_{n+3}} \frac{1}{i} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} + \sum_{i=F_{n+2}+1}^{F_{n+3}} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

donc par récurrence sur n, on obtient pour tout $n \geq 1$, $W_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i}$.

4d En déduire que :

$$W_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{F_{k+2}}$$

Soit $k \in [|1, n|]$, et $i \in [|F_{k+1} + 1, F_{k+2}|]$, alors $0 < i \leq F_{k+2}$ donc $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{F_{k+2}}$

donc $\sum\limits_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} \geq \sum\limits_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{F_{k+2}} = \frac{(F_{k+2} - F_{k+1})}{F_{k+2}}$ car le nombre de termes dans la somme est $F_{k+2} - F_{k+1}$.

Enfin, $F_{k+2} - F_{k+1} = F_k$ donc $\sum\limits_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} \geq \frac{F_k}{F_{k+2}}$. Donc :

$$W_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=F_{k+1}+1}^{F_{k+2}} \frac{1}{i} \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{F_{k+2}}.$$

4e En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Or $\frac{F_k}{F_{k+2}} \geq \frac{1}{5}$ donc $W_n \geq 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{5} = 1 + \frac{n}{5}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{n}{5}\right) = +\infty$, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$.

(H_n) est une suite croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, (H_n) a une limite finie ou $+\infty$.

Or (F_{n+2}) est une suite strictement croissante d'entiers naturels donc $(W_n) = \left(H_{F_{n+2}}\right)$ est une suite extraite de (H_n) donc elle a même limite que (H_n). Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.