



## D.S.4 samedi 14 Décembre 2024 (3h)

**Exercice 1 :** Soit la fonction  $f$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ .

- 1 Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 2 Montrer que l'équation  $f(x) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$  est équivalente à une équation polynomiale en  $x$ . En déduire que cette équation admet une unique solution dans  $\mathbb{R}^+$  notée  $\alpha$ . Vérifier que  $1 < \alpha < 2$ .
- 3 On définit la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$  par  $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) = (f \circ f)(x) - x$ . On admet que l'on peut factoriser  $h$  sous la forme :

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2 + 1)^2 + 9}$$

- 3a Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  a exactement trois solutions distinctes  $\alpha, \beta, \beta'$  avec  $0 < \beta < \alpha < \beta'$  où  $\alpha$  est le réel défini ci-dessus.
- 3b Déterminer le signe de  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 3c Montrer (avec un minimum de calculs svp !!) que  $f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'$  et  $f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$ .

On considère désormais la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 4 Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite à termes positifs.
- 5 Pas de question 5.
- 6a Montrer que  $f \circ f$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 6b Montrer que quelle que soit la valeur donnée à  $u_0$ , la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Déterminer si la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi monotone et le cas échéant, comparer son sens de variations à celui de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  (justifiez vos réponses) ?
- 6c On appelle  $l$  une **éventuelle limite réelle** de la suite  $(u_{2n})$ . Montrer que  $l \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$
- 6d Si  $l'$  est une **éventuelle limite réelle** de la suite  $(u_{2n+1})$ , quelles sont les valeurs possibles de  $l'$  ?  
On étudie désormais la convergence de la suite  $(u_n)$  selon quelques cas particuliers de valeurs de  $u_0$ .
- 7 On suppose que  $u_0 = \alpha$ . Quelle est la particularité de la suite  $(u_n)$  dans ce cas ? Est-elle convergente ?
- 8 On suppose que  $u_0 \in \{\beta, \beta'\}$ . Quelle est la particularité des suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ? Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
- 9 Dans cette question, on suppose que  $u_0 \in [0, \beta[$ .
- 9a Montrer que la suite  $(u_{2n})$  est à valeurs dans  ${}_2[0, \beta]$ .

**9b** Montrer que la suite  $(u_{2n+1})$  est à valeurs dans  $[\beta', 3]$ .

**9c** En utilisant les variations des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , montrer qu'elles sont convergentes et déterminer leur limite respective.

**9d** La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?

**Exercice 2 : injections, surjections, bijections.** Soit  $E$  un ensemble. Les deux questions sont indépendantes.

**1** On note  $Id_E$  l'application identité de  $E$  dans  $E$  ( $\forall x \in E, Id_E(x) = x$ ). Soit  $f$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $f \circ f \circ f = Id_E$ . Montrer que  $f$  est bijective.

**2** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On note respectivement  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}(A)$  et  $\mathcal{P}(B)$  les ensembles des parties de  $E$ ,  $A$  et  $B$ .

Soit  $\Phi$  l'application :

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

**2a** Montrer que  $\Phi$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ . (on procédera par double implication).

**2b** Déterminer de même une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  et  $B$  pour que  $\Phi$  soit surjective. On énoncera un résultat que l'on démontrera ensuite par double implication.

**Problème : moyenne arithmético-géométrique.**

**Préliminaire :** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante telle que la fonction  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  est décroissante.

**1a** Soit  $x_0 \in ]0, +\infty[$ . Montrer que  $f$  est continue à droite en  $x_0$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

**1b** Montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Partie 1 :** Soient  $a, b$  deux réels positifs. On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

**2** On se propose de montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite.

**2a** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

**2b** Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont monotones à partir de  $n \geq 1$  et de sens de monotonie contraires.

**2c** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$ .

**2d** Conclure.

La limite commune à ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ . Elle sera notée  $M(a, b)$ .

**2e** Déterminer  $M(a, a)$  et  $M(0, b)$  pour  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

Dans la suite du problème, on notera  $(u_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites précédemment définies. Cette notation permet de comparer ces suites définies relativement à des valeurs initiales ( $a$  et  $b$ ) différentes.

**3** On se propose d'établir quelques propriétés utiles de la fonction  $(a, b) \mapsto M(a, b)$ .

**3a** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : M(a, b) = M(b, a)$ .

**3b** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .

**3c** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ .

**3d** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$ .

**Partie 2 :** On considère ici la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $\varphi(x) = M(1, x)$ .

**4** Donner  $\varphi(0)$  et  $\varphi(1)$ .

**5** On désire prouver que la fonction  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour cela on considère  $0 \leq x < y$  deux réels.

**5a** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(1, x) \leq u_n(1, y)$  et  $v_n(1, x) \leq v_n(1, y)$ .

**5b** Conclure.

**6** On étudie ici la continuité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**6a** Montrer que  $\forall x > 0, \varphi(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**6b** Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**6c** Montrer que  $\forall x \geq 0, \varphi(x) = \frac{1+x}{2}\varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ .

**6d** En déduire que  $\varphi$  est continue à droite en 0 :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$ .

**7** On étudie ici le comportement de  $\varphi$  en  $+\infty$ .

**7a** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq \varphi(x) \leq \frac{1+x}{2}$ .

**7b** Etudier la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ .

**8** Représenter sur un même graphe les allures des fonctions  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \varphi(x)$  et  $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ .

**9** Etudier la dérivabilité de  $\varphi$  en 0 à droite et en 1.

**Corrigé de l'exercice 1 :** Soit la fonction  $f$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ .

**1** Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

$f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction rationnelle de dénominateur jamais nul et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-6x}{(1+x^2)^2}$  est du signe de  $-x$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

**2** Montrer que l'équation  $f(x) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$  est équivalente à une équation polynômiale en  $x$ . En déduire que cette équation admet une unique solution dans  $\mathbb{R}^+$  notée  $\alpha$ . Vérifier que  $1 < \alpha < 2$ .

On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 3 = x(1+x^2) \Leftrightarrow x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

en posant  $g(x) = x^3 + x - 3$ . On a  $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et  $g(1) = -1 < 0$  et  $g(2) = 7 > 0$  donc  $g$  change de signe sur  $[1, 2]$ , est continue et strictement croissante donc d'après le corollaire du TVI, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]1, 2[$ . Par monotonie de  $g$ ,  $\alpha$  est l'unique solution de  $g(x) = 0$  donc aussi de l'équation  $f(x) = x$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

**3** On définit la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$  par  $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) = (f \circ f)(x) - x$ . On admet que l'on peut factoriser  $h$  sous la forme :

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2 + 1)^2 + 9}$$

**3a** Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  a exactement trois solutions distinctes  $\alpha, \beta, \beta'$  avec  $0 < \beta < \alpha < \beta'$  où  $\alpha$  est le réel défini ci-dessus.

On a :

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1) = 0 \text{ ou } (x^3 + x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \alpha \text{ ou } x = \beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \beta' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ (on a } \Delta = 9 - 4 = 5) \end{aligned}$$

Or  $0 < \beta < 1$  car  $0 < 3 - \sqrt{5} < 2$  car  $\sqrt{5} > 1$  et  $\beta' > 2$  car  $3 + \sqrt{5} > 4$  donc on a bien  $0 < \beta < \alpha < \beta'$ .

**3b** Déterminer le signe de  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Le dénominateur est toujours positif. Le facteur  $x^3 + x - 3$  est négatif pour  $0 < x < \alpha$  et positif pour  $x > \alpha$  et  $x^2 - 3x + 1$  est positif pour  $0 < x < \beta$  et  $x > \beta'$  d'où le signe de  $h$  :

| $x$            | 0 | $\beta$ | $\alpha$ | $\beta'$ | $+\infty$ |
|----------------|---|---------|----------|----------|-----------|
| $x^3 + x - 3$  | — | —       | 0        | +        | +         |
| $x^2 - 3x + 1$ | + | —       | —        | +        | +         |
| $h(x)$         | + | —       | +        | —        | —         |

**3c** Montrer que  $f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'$  et  $f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$ .

On peut calculer directement avec les valeurs de  $\beta$  et  $\beta'$  mais il y a mieux :

$$\begin{aligned} h(\beta) &= 0 \text{ donc } f(f(\beta)) = \beta \\ \text{donc } f(f(f(\beta))) &= f(\beta) \text{ donc } h(f(\beta)) = 0 \end{aligned}$$

donc  $f(\beta) = \beta, \alpha$  ou  $\beta'$ .

De même, on obtient que  $f(\alpha)$  et  $f(\beta')$  sont l'un des 3 nombres  $\beta, \alpha$  ou  $\beta'$ .

Or  $0 < \beta < \alpha < \beta'$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $f(\beta') < f(\alpha) < f(\beta)$  donc :

$$f(\beta) = \beta' \text{ et } f(\beta') = \beta$$

$$\text{Enfin } \beta\beta' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{9 - 5}{4} = 1 \text{ donc :}$$

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta' \text{ et } f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$$

On considère désormais la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**4** Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite à termes positifs.

$$\text{Pas de récurrence par pitié! } u_0 \geq 0 \text{ et pour } n \geq 1, u_n = f(u_{n-1}) = \frac{3}{1 + u_{n-1}^2} \geq 0.$$

**5a** On suppose que  $u_0 = 1$ . Calculer les valeurs de  $u_1$  et  $u_2$ . La suite  $(u_n)$  est-elle monotone ?

On a  $u_1 = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$  et  $u_2 = \frac{3}{1+9/4} = \frac{12}{13}$  donc  $u_2 < u_0 < u_1$  donc  $(u_n)$  n'est ni croissante ni décroissante ie pas monotone.

**5b** On suppose que  $u_0 = 2$ . Calculer les valeurs de  $u_1$  et  $u_2$ . La suite  $(u_n)$  est-elle monotone ?

On a  $u_1 = \frac{3}{1+4} = \frac{3}{5}$  et  $u_2 = \frac{3}{1+9/25} = \frac{75}{34}$ . On a  $u_1 < u_2 < u_0$  donc la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.

**6a** Montrer que  $f \circ f$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $f \circ f$  est croissante (strictement) sur  $\mathbb{R}^+$ .

**6b** Montrer que quelle que soit la valeur donnée à  $u_0$ , la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Déterminer si la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi monotone et le cas échéant, comparer son sens de variations à celui de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  (justifiez vos réponses) ?

Notons  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$  et  $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$ .

- 1er cas :  $v_0 \geq v_1$ . Alors une récurrence (vue en exercice) montre en utilisant que  $f \circ f$  est croissante que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \geq v_{n+1}$ . Vous devez bien sûr la rédiger !!

- 2ème cas :  $v_1 \geq v_0$ . Idem !!

$f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc si  $v_n \geq v_{n+1}$  alors  $f(v_n) \leq f(v_{n+1})$  ie  $w_n \leq w_{n+1}$ . Dans le premier cas,  $(w_n)$  sera donc croissante.

Et si  $v_n \leq v_{n+1}$  alors  $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$  ie  $w_n \geq w_{n+1}$  donc dans le second cas,  $(w_n)$  sera décroissante.

Ainsi, dans tous les cas,  $(w_n)$  est monotone de sens de monotonie contraire à celui de  $(v_n)$ .

**6c** On appelle  $l$  une éventuelle limite réelle de la suite  $(u_{2n})$ . Montrer que  $l \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$ .

On suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f \circ f)(v_n) = (f \circ f)(l)$ . car  $f \circ f$  est continue en  $l$ . Donc par unicité de la limite,  $(f \circ f)(l) = l$  ie  $h(l) = 0$ . Donc  $l \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$ .

**6d** Si  $l'$  est une éventuelle limite réelle de la suite  $(u_{2n+1})$ , quelles sont les valeurs possibles de  $l'$  ?

Idem on obtient  $l' \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$ .

On étudie désormais la convergence de la suite  $(u_n)$  selon quelques cas particuliers de valeurs de  $u_0$ .

**7** On suppose que  $u_0 = \alpha$ . Quelle est la particularité de la suite  $(u_n)$  dans ce cas ? Est-elle convergente ?  
Puisque  $f(\alpha) = \alpha$ , la suite est constante égale à  $\alpha$  donc convergente de limite  $\alpha$ .

**8** On suppose que  $u_0 \in \{\beta, \beta'\}$ . Quelle est la particularité des suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ? Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite  $(u_n)$  ?  
Puisque  $f(\beta) = \beta'$  et  $f(\beta') = \beta$ , on a pour tout  $n$ ,  $u_{2n} = \beta$  et  $u_{2n+1} = \beta'$  donc ces suites sont constantes et convergentes vers  $\beta$  et  $\beta'$  qui sont différents donc  $(u_n)$  n'est pas convergente.

**9** Dans cette question, on suppose que  $u_0 \in [0, \beta[$ .

**9a** Montrer que la suite  $(u_{2n})$  est à valeurs dans  $[0, \beta]$ .

$f \circ f$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et  $(f \circ f)(\beta) = \beta$  donc on montre par récurrence (vous devez la rédiger) que  $u_{2n} \in [0, \beta]$ .

**9b** Montrer que la suite  $(u_{2n+1})$  est à valeurs dans  $[\beta', 3]$ .

Puisque  $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{1+u_0^2} \leq 3$  et  $u_0 \leq \beta$  donc  $f(u_0) \geq f(\beta)$  ie  $u_1 \geq \beta'$ .

Ainsi  $u_1 \in [\beta', 3]$ . On montre alors par récurrence que  $u_{2n+1} \in [\beta', 3]$  ou mieux ; on a pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq u_{2n} \leq \beta$  donc,  $f$  étant décroissante,  $f(\beta) = \beta' \leq u_{2n+1} \leq f(0) = 3$ .

**9c** En utilisant les variations des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , montrer qu'elles sont convergentes et déterminer leur limite respective.

$(u_{2n})$  est monotone et bornée et  $(u_{2n+1})$  est monotone et bornée donc elles sont convergentes d'après le théorème de la limite monotone. Leurs limites étant respectivement dans  $[0, \beta]$  et  $[\beta', 3]$  et ne pouvant être égales qu'à  $\beta, \alpha$  ou  $\beta'$  et puisque  $\beta < \alpha < \beta'$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \beta$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \beta'.$$

**9d** La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?

Ces deux limites étant différentes, la suite  $(u_n)$  n'est pas convergente.

**Corrigé de l'exercice 2 : injections, surjections, bijections.** Soit  $E$  un ensemble. Les deux questions sont indépendantes.

**1** On note  $Id_E$  l'application identité de  $E$  dans  $E$  ( $\forall x \in E, Id_E(x) = x$ ). Soit  $f$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $f \circ f \circ f = Id_E$ . Montrer que  $f$  est bijective.

Soient  $x, x' \in E$  tels que  $f(x) = f(x')$ . Alors en composant par  $f \circ f$ , on a  $(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x')$  donc puisque  $f \circ f \circ f = Id_E$ , on a  $x = x'$ .

Donc  $f$  est injective.

Soit  $y \in E$ . Alors  $y = (f \circ f \circ f)(y) = f((f \circ f)(y))$  donc  $y$  admet un antécédent par  $f$ .

Donc  $f$  est surjective.

Donc  $f$  est bijective.

**2** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On note respectivement  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}(A)$  et  $\mathcal{P}(B)$  les ensembles des parties de  $E$ ,  $A$  et  $B$ .

Soit  $\Phi$  l'application :

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

**2a** Montrer que  $\Phi$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ . (on procédera par double implication).

( $\Leftarrow$ ) On suppose  $A \cup B = E$ . Soient  $X, X' \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $\Phi(X) = \Phi(X')$ . Alors  $(X \cap A, X \cap B) = (X' \cap A, X' \cap B)$ .

Soit  $x \in X$ , alors  $x \in E = A \cup B$  donc  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Donc  $x \in X \cap A$  ou  $x \in X \cap B$ . Donc  $x \in X' \cap A$  ou  $x \in X' \cap B$ . Donc  $x \in X'$ .

Donc  $X \subset X'$ . L'inclusion inverse  $X' \subset X$  se prouve de manière identique. Donc  $X = X'$ .

Donc  $\Phi$  est injective.

( $\Rightarrow$ ) On raisonne par contraposée en supposant  $A \cup B \neq E$ . Comme  $A$  et  $B$  sont des parties de  $E$ , cela signifie qu'il existe  $x \in E$  tel que  $x \notin A$  et  $x \notin B$ .

Il est alors clair que  $\Phi(\{x\}) = (\emptyset, \emptyset) = \Phi(\emptyset)$  alors que  $\{x\} \neq \emptyset$ . Donc  $\Phi$  n'est pas injective.

Par contraposée, si  $\Phi$  est injective, alors  $A \cup B = E$ .

L'équivalence est donc prouvée.

**2b** Montrons que  $\Phi$  est surjective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $A \cap B = \emptyset$ . Soit  $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ . Posons  $X = Y \cup Z$ . On a alors :

$$X \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A) = Y$$

car  $Y \subset A$  et  $Z \subset B$  donc  $Z \cap A = \emptyset$ .

De même,  $X \cap B = Z$ . Donc :

$$\Phi(X) = (X \cap A, X \cap B) = (Y, Z)$$

Donc  $\Phi$  est surjective.

( $\Rightarrow$ ) Par contraposée, supposons  $A \cap B \neq \emptyset$ . On peut alors prendre  $x \in A \cap B$ . Montrons que  $(\{x\}, \emptyset)$  n'a pas d'antécédent par  $\Phi$ . En effet, si  $\Phi(X) = (\{x\}, \emptyset)$ , alors  $x \in X \cap A$  mais aussi  $x \in B$  donc  $x \in X \cap B = \emptyset$ , ce qui est absurde. Donc  $\Phi$  n'est pas surjective.

Par contraposée, si  $\Phi$  est surjective, alors  $A \cap B = \emptyset$ .



**Problème : moyenne arithmético-géométrique.**

**Préliminaire :** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante telle que la fonction  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  est décroissante.

**1a** Soit  $x_0 \in ]0, +\infty[$ . Montrer que  $f$  est continue à droite en  $x_0$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

Soit  $x > x_0$ , on a alors  $f(x) \geq f(x_0)$  et  $g(x) = \frac{f(x)}{x} \leq g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$  donc :

$$f(x_0) \leq f(x) \leq \frac{x}{x_0} f(x_0)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x}{x_0} f(x_0) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x_0)$  donc par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$  donc  $f$  est continue à droite en 0.

**1b** Montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $x < x_0$ , on a alors  $f(x) \leq f(x_0)$  et  $g(x) = \frac{f(x)}{x} \geq g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$  donc :

$$\frac{x}{x_0} f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{x}{x_0} f(x_0) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x_0)$  donc par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  donc  $f$  est continue à gauche en 0.

Donc  $f$  étant continue à droite et à gauche en  $x_0$ , est continue en  $x_0$ .

**Partie 1 :** Soient  $a, b$  deux réels positifs. On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

**2** On se propose de montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite.

**2a** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

On montre facilement par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que conjointement,  $u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$ . (A rédiger !)

Ensuite, on a pour  $n \geq 1$  :

$$v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} = \frac{1}{2} (\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}})^2 \geq 0$$

donc  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

**2b** Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont monotones à partir de  $n \geq 1$  et de sens de monotonie contraires.

Pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0 \\ u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n} (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0 \end{aligned}$$

donc  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  décroissante à partir du rang 1.

**2c** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$ .

Remarquons que puisque  $(u_n)$  est croissante, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - u_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

On peut alors conclure en rédigeant une récurrence ou pour  $n \geq 1$  par :

$$v_n - u_n \leq \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} \leq \frac{v_{n-2} - u_{n-2}}{2^2} \leq \dots \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}$$

$$\text{donc } 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}}.$$

**2d** Conclure.

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} \frac{v_1 - u_1}{2^{n-1}} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty^-} 0$  donc par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} (v_n - u_n) = 0$  donc les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. Donc elles admettent une limite commune.

La limite commune à ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ . Elle sera notée  $M(a, b)$ .

**2e** Déterminer  $M(a, a)$  et  $M(0, b)$  pour  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

Dans la suite du problème, on notera  $(u_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites précédemment définies. Cette notation permet de comparer ces suites définies relativement à des valeurs initiales ( $a$  et  $b$ ) différentes. Lorsque  $a = b$ , on a pour tout  $n$ ,  $u_n(a, a) = v_n(a, a) = a$  donc  $M(a, a) = a$ .

Lorsque  $a = 0$ , on a facilement par récurrence, pour tout  $n$ ,  $u_n(0, b) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_n(0, b) = 0$  donc  $M(0, b) = 0$ .

**3** On se propose d'établir quelques propriétés utiles de la fonction  $(a, b) \mapsto M(a, b)$ .

**3a** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : M(a, b) = M(b, a)$ .

Il est clair pour  $n = 1$  et donc immédiatement pour tout  $n \geq 1$  que  $u_n(a, b) = u_n(b, a)$  et  $v_n(a, b) = v_n(b, a)$  donc  $M(a, b) = M(b, a)$ .

**3b** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .

On vérifie facilement par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , que  $u_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda u_n(a, b)$  et  $v_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda v_n(a, b)$  (on utilise  $\lambda \geq 0$  pour cela). Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_n(\lambda a, \lambda b) = M(\lambda a, \lambda b)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} \lambda u_n(a, b) = \lambda M(a, b)$  donc par unicité de la limite,  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .

**3c** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ .

Il est clair (et cela se vérifie encore par récurrence) que  $u_{n+1}(a, b) = u_n\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$  et  $v_{n+1}(a, b) = v_n\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_{n+1}(a, b) = \lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_n(a, b) = M(a, b)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_n\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$  donc par unicité de la limite,  $M(a, b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ .

**3d** Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$ .

La suite  $(u_n(a, b))$  est croissante et la suite  $(v_n(a, b))$  est décroissante et elles sont adjacentes donc :

$$u_1(a, b) \leq M(a, b) \leq v_1(a, b)$$

i.e.

$$\sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2}.$$

**Partie 2 :** On considère ici la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $\varphi(x) = M(1, x)$ .

**4** Donner  $\varphi(0)$  et  $\varphi(1)$ .

On a d'après 2e et 3a :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= M(1, 0) = M(0, 1) = 0 \\ \varphi(1) &= M(1, 1) = 1\end{aligned}$$

**5** On désire prouver que la fonction  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour cela on considère  $0 \leq x < y$  deux réels.

**5a** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(1, x) \leq u_n(1, y)$  et  $v_n(1, x) \leq v_n(1, y)$ .

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $u_n(1, x) \leq u_n(1, y)$  et  $v_n(1, x) \leq v_n(1, y)$  :

- I.:  $n = 0, u_0(1, x) = 1 \leq u_0(1, y) = 1$  et  $v_0(1, x) = x \leq v_0(1, y) = 0$ . OK!
- H.: Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n(1, x) \leq u_n(1, y)$  et  $v_n(1, x) \leq v_n(1, y)$ . Alors tout est positif donc  $0 \leq u_n(1, x) v_n(1, x) \leq u_n(1, y) v_n(1, y)$

$$u_{n+1}(1, x) = \sqrt{u_n(1, x) v_n(1, x)} \leq \sqrt{u_n(1, y) v_n(1, y)} = u_{n+1}(1, y)$$

$$\text{et } \frac{u_n(1, x) + v_n(1, x)}{2} \leq \frac{u_n(1, y) + v_n(1, y)}{2} \text{ donc } v_{n+1}(1, x) \leq v_{n+1}(1, y).$$

- Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n(1, x) \leq u_n(1, y)$  et  $v_n(1, x) \leq v_n(1, y)$ .

**5b** Conclure.

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_n(1, x) = \varphi(x)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty^-} u_n(1, y) = \varphi(y)$  donc par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty : \varphi(x) \leq \varphi(y)$ .

Donc  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**6** On étudie ici la continuité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**6a** Montrer que  $\forall x > 0, \varphi(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a en utilisant 3b et 3a :

$$\varphi(x) = M(1, x) = xM\left(\frac{1}{x}, 1\right) = xM\left(1, \frac{1}{x}\right) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

**6b** En exploitant le préliminaire, montrer que  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Posons  $g(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ , alors  $g(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  car si  $0 < x < y$ , alors

$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$  donc  $\varphi\left(\frac{1}{y}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$  donc  $g(y) \leq g(x)$  donc  $\varphi$  est croissante sur  $]0, +\infty[$  et  $g$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Donc d'après le préliminaire,  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**6c** Montrer que  $\forall x \geq 0, \varphi(x) = \frac{1+x}{2} \varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ .

On a pour  $x \geq 0 : \varphi(x) = M(1, x) = M\left(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}\right)$  (3c) donc (3b et 3a) :

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{2} M\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}, 1\right) = \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{1+x}{2} \varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

**6d** En déduire que  $\varphi$  est continue à droite en 0 :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$ .

$\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et positive donc minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone,  $\varphi$  admet en  $0^+$  une limite finie  $l \geq 0$ .

On a aussi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = l$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{2} \varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{l}{2}$  donc

par passage à la limite dans 6c, on obtient  $l = \frac{l}{2}$  donc  $l = 0$  i.e.,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0 = M(1, 0) = \varphi(0)$  donc  $\varphi$  est continue à droite en 0.

**7** On étudie ici le comportement de  $\varphi$  en  $+\infty$ .

**7a** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq \varphi(x) \leq \frac{1+x}{2}$ .

On a d'après 3d,  $\sqrt{x} \leq M(1, x) \leq \frac{1+x}{2}$  donc  $\sqrt{x} \leq \varphi(x) \leq \frac{1+x}{2}$ .

**7b** Etudier la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , par théorème de comparaison, il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ .

**8** Représenter sur un même graphe les allures des fonctions  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \varphi(x)$  et  $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ .

**9** En exploitant l'encadrement de 7a, étudier la dérivabilité de  $\varphi$  en 0 à droite et en 1, c'est-à-dire étudier si les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1}.$$

existent et sont finies.

- En  $0^+$  :  $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{\varphi(x)}{x}$  donc  $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\varphi(x)}{x}$  donc par théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = +\infty$  donc  $\varphi$  n'est pas dérivable à droite en 0.

- En 1 :  $\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \frac{\varphi(x) - 1}{x - 1}$  donc  $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \leq \frac{\varphi(x) - 1}{x - 1} \leq \frac{\frac{1+x}{2} - 1}{x - 1}$  donc  $\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq \frac{\varphi(x) - 1}{x - 1} \leq \frac{x - 1}{2(x - 1)} = \frac{1}{2}$

donc puisque  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$  par encadrement, on a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$  donc  $\varphi$  est dérivable en 1 et  $\varphi'(1) = \frac{1}{2}$ .