

## D.S.6 8 Mars 2025

**Exercice 1 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

1 Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que :

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

2 Soit  $H$  un troisième sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que :

$$G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

**Exercice 2 :**

1 Etude d'un exemple : on considère l'application  $f$  définie par:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z) \end{cases}$$

1a Justifier que  $f$  est linéaire.

1b Montrer que  $f \circ f = \lambda_0 f$  pour un réel  $\lambda_0$  que l'on précisera.

1c Déterminer une base de  $\ker(f)$ .

1d Notons  $\vec{c}_1 = (-1, -6, 3)$  et  $\vec{c}_2 = (1, 4, -1)$ . Montrer que  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

2 Etude générale: soit  $\lambda$  un réel non nul,  $n$  un entier naturel et  $E = \mathbb{R}^n$ . On considère un endomorphisme  $g$  de  $E$  tels que  $g \circ g = \lambda g$ .

2a Montrer que  $\text{Im}(g) = \{\vec{v} \in E \mid g(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$ .

2b Montrer que  $\ker(g) \oplus \text{Im}(g) = E$ .

2c Montrer que  $\text{Im}(g - \lambda \text{Id}_E) \subset \ker(g)$ .

**Problème : autour des fonctions hyperboliques :** On note  $\cosh$  et  $\sinh$  les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. On définit aussi la fonction tangente hyperbolique notée  $\tanh$  par :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

**Partie A : la fonction  $\tanh$  :**

1 Montrer que la fonction  $\tanh$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est continue et impaire sur cet intervalle.

2 Montrer que  $\tanh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}, (\tanh)'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$

3 Montrer que  $\tanh$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  à déterminer.

4 On note  $\text{Argth}$  la bijection réciproque de  $\tanh$ . Donner une expression de  $\text{Argth}(y)$  pour tout  $y \in I$ , à l'aide de la fonction  $\ln$ .

**5** Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $\frac{1}{\cosh(x)}$ .

En déduire que :

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5)$$

**Partie B : étude d'une fonction :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**6** Etudier la parité de  $f$ .

**7a** Donner un équivalent de la fonction  $\sinh$  en 0 et en déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**7b** Déterminer la limite de  $f$  en 0.  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

**8** Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et déterminer une fonction  $g$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f'(x) = g(x) \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

**9** Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $\tanh(t) < t$ .

**10** En déduire le tableau de variations de  $f$ .

**11** Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $t \mapsto \frac{\sinh(t)}{t}$ .

**12** En déduire qu'au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ ,  $f$  a un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des réels que l'on précisera.

**13** Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $x \mapsto F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.

Préciser la tangente en 0 et la position de la courbe représentative de  $F$  par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

**Partie C : Une équation différentielle :** On considère l'équation différentielle  $(E)$  suivante, qu'on va résoudre sur différents intervalles :

$$(E) : xy' + y = \cosh(x)$$

**14** Résoudre  $(E)$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**15** Donner sans justification les solutions de l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{-*}$ .

**16** Justifier que la fonction  $F$  (définie question 13) est l'unique solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie D : Etude d'une suite :**

**17** Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = \frac{n+1}{n}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . On la note  $u_n$ .

On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  qu'on va étudier dans les questions qui suivent.

**18** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

**19** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**20** En utilisant la question 12, déterminer un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Partie E : Une fonction définie par une intégrale :** Pour  $x > 0$ , on pose  $J(x) = \int_{x/2}^x f(t) dt$  et  $\psi(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

**21a** Justifier que  $J$  et  $\psi$  sont définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**21b** Montrer que  $J$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et exprimer  $J'(x)$ .

**22** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$ .

**23** En déduire que  $J'(x)$  s'exprime sous la forme :

$$\forall x > 0, J'(x) = f(x) \times \left(1 - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

**24** Etudier le signe de  $J'$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; on exprimera le ou les zéros de  $J'$  à l'aide de la fonction  $\ln$ .

**25a** Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sinh(x) \geq \frac{e^x - 1}{2}$ .

**25b** En déduire que pour tout  $x > 0$  :

$$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right], f(t) \geq \frac{x}{2} (e^{1/x} - 1)$$

**25c** En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$ .

**26a** Justifier que pour tout  $x > 0$  :  $\sinh(x) \geq x$ .

**26b** En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $J(x) \geq \frac{x}{2}$ . Donner alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x)$ .

**26c** Donner un équivalent de  $\sinh(x) - x$  quand  $x$  tend vers 0. En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]0, \delta], \sinh(x) \leq x + \frac{x^3}{4}.$$

**26d** Montrer alors que pour tout  $x \in \left[\frac{2}{\delta}, +\infty\right[$  :  $J(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{4x}$ .

Conclure que la courbe représentative de  $J$  admet une asymptote oblique (que l'on précisera) en  $+\infty$  et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**27** Tracer la courbe représentative de  $J$ .

On donne pour le tracé  $\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \approx 0,76$  et  $J\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ .

**Corrigé de l'exercice 1 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

**1** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que :

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Exercice vu en cours.

**2** Soit  $H$  un troisième sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que :

$$G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

On suppose  $G \subset F$ .

- ( $\subset$ ) Soit  $\vec{x} \in F \cap (G + H)$ . Alors il existe  $\vec{g} \in G$  et  $\vec{h} \in H$  tels que  $\vec{x} = \vec{g} + \vec{h}$ , et  $\vec{x} \in F$ .  
Alors  $\vec{h} = \vec{x} - \vec{g} \in F$  car  $G \subset F$  donc  $\vec{g} \in F$  aussi.  
Ainsi,  $\vec{h} \in F \cap H$  donc  $\vec{x} = \vec{g} + \vec{h} \in G + (F \cap H)$ .  
Donc  $F \cap (G + H) \subset G + (F \cap H)$
- ( $\supset$ ) Réciproquement, soit  $\vec{x} \in G + (F \cap H)$ . Alors il existe  $\vec{g} \in G$  et  $\vec{y} \in F \cap H$  tels que  $\vec{x} = \vec{g} + \vec{y}$ . On a  $\vec{y} \in F$  et  $\vec{g} \in F$  car  $G \subset F$ . Donc  $\vec{x} \in F$ . De plus,  $\vec{y} \in H$  donc  $\vec{x} = \vec{g} + \vec{y} \in G + H$ .  
Donc  $\vec{x} \in F \cap (G + H)$ .  
Donc  $G + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$ .
- Donc  $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$ .

**Corrigé de l'exercice 2 :**

**1a**  $f$  est linéaire car c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

**1b** On a  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$  donc  $f \circ f = 2f$ .

**1c** Soit  $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ -6(y + z) + 4y + 2z = 0 \\ 3(y + z) - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ -2y - 4z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = (-z, -2z, z) \Leftrightarrow \vec{u} = z(-1, -2, 1). \end{aligned}$$

Donc  $\ker(f)$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{u}_0 = (-1, -2, 1)$ .

**1d** On reconnaît les deux premières colonnes de  $A$ , qui sont les images par  $f$  des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  donc  $\vec{c}_1, \vec{c}_2 \in \text{Im}(f)$ .

De plus, ils sont non colinéaires donc  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  est libre. Enfin (d'après un théorème vu en cours),  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .

$$\text{Or } \vec{c}_3 = a\vec{c}_1 + b\vec{c}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ -6a + 4b = 2 \\ 3a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ -2a + 4 = 2 \\ 2a - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ donc } \vec{c}_3 = \vec{c}_1 + 2\vec{c}_2.$$

Comme tout vecteur de  $\text{Im}(f)$  est combinaison linéaire de  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  et  $\vec{c}_3$  et que  $\vec{c}_3 = \vec{c}_1 + 2\vec{c}_2$ , tout vecteur de  $\text{Im}(f)$  est combinaison linéaire de  $\vec{c}_1$  et  $\vec{c}_2$ , donc  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .

Conclusion:  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$  est une base de  $\text{Im}(f)$ .

**2** Etude générale: soit  $\lambda$  un réel non nul,  $n$  un entier naturel et  $E = \mathbb{R}^n$

On considère un endomorphisme  $g$  de  $E$  tels que  $g \circ g = \lambda g$ .

**2a** Soit  $\vec{v} \in E$  tel que  $g(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ . Alors  $\vec{v} = \frac{1}{\lambda} g(\vec{v}) = g\left(\frac{\vec{v}}{\lambda}\right)$  donc  $\vec{v} \in \text{Im}(g)$ .

Réciproquement, soit  $\vec{v} \in \text{Im}(g)$ . Alors il existe  $\vec{u} \in E$  tel que  $\vec{v} = g(\vec{u})$

Comme  $g \circ g = \lambda g$ , on a  $g(\vec{v}) = g(g(\vec{u})) = g \circ g(\vec{u}) = \lambda g(\vec{u}) = \lambda \vec{v}$

donc  $\text{Im}(g) = \{\vec{v} \in E / g(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$ .

**2b** Analyse: soit  $\vec{u} \in E$ . Supposons que  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  avec  $\vec{v} \in \ker(g)$  et  $\vec{w} \in \text{Im}(g)$ .

Alors  $g(\vec{u}) = g(\vec{w}) = \lambda \vec{w}$  donc  $\vec{w} = \frac{1}{\lambda} g(\vec{u})$  et  $\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{\lambda} g(\vec{u})$ .

Synthèse: Soient  $\vec{u} \in E$ ,  $\vec{w} = \frac{1}{\lambda} g(\vec{u})$  et  $\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{\lambda} g(\vec{u})$ .

Alors  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$ .

De plus,  $g(\vec{v}) = g\left(\vec{u} - \frac{1}{\lambda} g(\vec{u})\right) = g(\vec{u}) - \frac{1}{\lambda} g \circ g(\vec{u}) = g(\vec{u}) - g(\vec{u}) = \vec{0}$  donc  $\vec{v} \in \ker(g)$ .

Enfin,  $g(\vec{w}) = g\left(\frac{1}{\lambda} g(\vec{u})\right) = \frac{1}{\lambda} g \circ g(\vec{u}) = g(\vec{u}) = \lambda \vec{w}$  donc  $\vec{w} \in \text{Im}(g)$ .

Ainsi, tout vecteur de  $E$  se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de  $\ker(g)$  et d'un vecteur de  $\text{Im}(g)$ .

Donc  $\ker(g) \oplus \text{Im}(g) = E$ .

**2c** Soit  $\vec{v} \in \text{Im}(g - \lambda Id_E)$ .

Alors il existe  $\vec{u} \in E$  tel que  $\vec{v} = (g - \lambda Id_E)(\vec{u}) = g(\vec{u}) - \lambda \vec{u}$ .

Donc  $g(\vec{v}) = g \circ g(\vec{u}) - \lambda g(\vec{u}) = \lambda g(\vec{u}) - \lambda g(\vec{u}) = \vec{0}$  donc  $\vec{v} \in \ker(g)$ .

**2d** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\alpha g$  est linéaire donc  $\alpha g$  est un projecteur si et seulement si  $\alpha g \circ \alpha g = \alpha g$ .

Or  $\alpha g \circ \alpha g = \alpha^2 g \circ g = \alpha^2 \lambda g$  donc (hormis le cas où  $g$  est l'application nulle),  $\alpha g$  est un projecteur si et seulement si  $\alpha^2 \lambda = \alpha$  c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ .

**Corrigé du problème : autour des fonctions hyperboliques :** On note  $\cosh$  et  $\sinh$  les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. On définit aussi la fonction tangente hyperbolique notée  $\tanh$  par :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

**Partie A : la fonction  $\tanh$  :**

- 1** Montrer que la fonction  $\tanh$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est continue et impaire sur cet intervalle.  
 $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) > 0$  donc  $\tanh$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions continues et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

donc  $\tanh$  est impaire.

- 2** Montrer que  $\tanh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}, (\tanh)'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ .  
 $\tanh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} (\tanh)'(x) &= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ &= 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x). \end{aligned}$$

- 3** Montrer que  $\tanh$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  à déterminer.

Donc pour tout  $x$ ,  $(\tanh)'(x) > 0$  donc  $\tanh$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$  donc

d'après le théorème de la bijection,  $\tanh$  induit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $I = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) \right[$

$$\begin{aligned} \text{Or } \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1 \text{ et } \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = 1. \text{ Donc } I = ]-1, 1[. \end{aligned}$$

- 4** On note  $\text{Argth}$  la bijection réciproque de  $\tanh$ . Donner une expression de  $\text{Argth}(y)$  pour tout  $y \in I$ , à l'aide de la fonction  $\ln$ .

Soit  $y \in I = ]-1, 1[$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} y &= \tanh(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(y - 1) = -1 - y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \text{ car } y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y}{1 - y} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, aussi, } y = \tanh(x) \Leftrightarrow x = \text{Argth}(y) \text{ donc } \text{Argth}(y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + y}{1 - y} \right).$$

- 5** Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $\frac{1}{\cosh(x)}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) \\ \frac{1}{\cosh(x)} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)} \\ \frac{1}{1 + h} &= \frac{1}{6} - h + h^2 + o_0(h^2) \end{aligned}$$

et en posant  $u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  donc par substitution :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh(x)} &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o_0(x^4) + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) \right)^2 + o_0 \left( \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) \right)^2 \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o_0(x^4) + o_0(x^4 + o_0(x^4)) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o_0(x^4) \end{aligned}$$

En déduire que :

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5)$$

Donc

$$\begin{aligned} \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o_0(x^4) \right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} + o_0(x^5) + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5) \end{aligned}$$

**Partie B : étude d'une fonction :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**6** Etudier la parité de  $f$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -x \sinh\left(\frac{-1}{x}\right) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \text{ donc } f \text{ est paire.}$$

**7a** Donner un équivalent de la fonction  $\sinh$  en 0 et en déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

On a  $\sinh(h) \sim_0 h$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc par substitution,  $\sinh\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$  donc  $f(x) \sim_{+\infty} 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

Comme  $f$  est paire,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 1$ .

**7b** Déterminer la limite de  $f$  en 0.  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

On a pour  $x > 0$  :

$$f(x) = x \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{2} = \frac{\frac{e^{1/x}}{1/x} - x e^{-1/x}}{2}$$

Or par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$  donc par composition,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = +\infty$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-1/x} = 0$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

Comme  $f$  est paire, on en déduit  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = +\infty$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.

**8** Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et déterminer une fonction  $g$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f'(x) = g(x) \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

$f$  est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) &= \sinh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = \tanh\left(\frac{1}{x}\right) \cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= g(x) \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en posant } g(x) = \tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

**9** Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $\tanh(t) < t$ .

Posons pour tout  $t \geq 0$  :  $h(t) = t - \tanh(t)$ , alors  $h'(t) = 1 - 1 + \tanh^2(t) \geq 0$  et même  $h'(t) > 0$  pour  $t > 0$  donc pour tout  $t > 0$ ,  $h(t) > h(0) = 0$  i.e.,  $\tanh(t) < t$ .

**10** En déduire le tableau de variations de  $f$ .

Or pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{1}{x} > 0$  donc  $g(x) < 0$  donc  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et par parité, strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{-*}$ .

**11** Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction  $t \mapsto \frac{\sinh(t)}{t}$ .

On a :

$$\frac{\sinh(t)}{t} = \frac{t + t^3/3! + t^5/5! + o_0(t^5)}{t} = 1 + \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o_0(t^4).$$

**12** En déduire qu'au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ ,  $f$  a un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des réels que l'on précisera.

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc par substitution :

$$f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

d'où  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a_3 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{6}$  et  $a_4 = \frac{1}{120}$ .

**13** Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $x \mapsto F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.

Préciser la tangente en 0 et la position de la courbe représentative de  $F$  par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Cette fonction  $F$  vérifie pour tout  $x > 0$  :

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_{0+}(x^2)$$

$f$  est paire donc  $F$  aussi donc ce DL vaut aussi en  $0^-$  donc  $F(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ , DL à l'ordre 2 qui suffit pour affirmer que  $F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) = 0$  (coeff de  $x$ ).

Que la tangente a pour équation  $y = 1$  et  $F(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{6} \geq 0$  donc la courbe représentative de  $F$  est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

**Partie C : Une équation différentielle :** On considère l'équation différentielle  $(E)$  suivante, qu'on va résoudre sur différents intervalles :

$$(E) : xy' + y = \cosh(x)$$

**14** Résoudre  $(E)$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cosh(x)$  et l'équation homogène associée,  $(E_0)$  s'écrit  $y' + \frac{y}{x} = 0$ .

On pose  $a(x) = \frac{1}{x}$  d'où sa primitive  $A(x) = \ln(x)$  et la solution générale de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  est  $y(x) = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Par variation de la constante,  $y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}$  donc :

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= \frac{1}{x} \cosh(x) \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \cosh(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x) = \cosh(x) \end{aligned}$$

On prend  $\lambda(x) = \sinh(x)$  d'où :  $y(x) = \frac{\sinh(x)}{x} = F(x)$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Donc la solution générale de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}^+$  est :

$$y(x) = F(x) + \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**15** Donner sans justification les solutions de l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{-*}$ .

Ce sont :

$$y(x) = F(x) + \frac{\mu}{x}, \mu \in \mathbb{R}.$$

**16** Justifier que la fonction  $F$  (définie question 13) est l'unique solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $\lambda$  ou  $\mu$  est non nul,  $y(x)$  aurait une limite infinie en 0, ce qui est absurde. Donc la seule possibilité est  $F(x)$ . On sait déjà que  $F$  est solution sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , sur  $\mathbb{R}^{-*}$  et que  $F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) = 0$  donc  $xy' + y = \cosh(x)$  est aussi vérifiée en 0 car  $F(0) = 1 = \cosh(0)$ .

Donc  $F$  est bien l'unique solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie D : Etude d'une suite :**

**17** Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = \frac{n+1}{n}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . On la note  $u_n$ .

On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  qu'on va étudier dans les questions qui suivent.

$f$  est strictement décroissante et continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc d'après le théorème de la bijection,  $f$  induit une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $]1, +\infty[$  (vu les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ ).

Or  $\frac{n+1}{n} \in ]1, +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = \frac{n+1}{n}$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**18** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

On a  $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$  donc  $f(u_{n+1}) < f(u_n)$  et  $f$  étant décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  donc  $(u_n)$  est croissante.

**19** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Dans le cas contraire, d'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  admettrait une limite finie  $l \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Mais alors par continuité de  $f$  en  $l$ , on aurait  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l) \in ]1, +\infty[$ , ce qui est

absurde car  $f(u_n) = \frac{n+1}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  (toujours par le théorème de la limite monotone).

**20** En utilisant la question 12, déterminer un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Par substitution dans le développement asymptotique de la question 12, on a donc :

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{u_n^4}\right)$$

donc  $f(u_n) - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{6u_n^2}$  donc  $\frac{1}{6u_n^2} \sim_{+\infty} \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$  donc  $u_n^2 \sim_{+\infty} \frac{n}{6}$  et puisque  $u_n > 0$  :

$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{6}}.$$

**Partie E : Une fonction définie par une intégrale :** Pour  $x > 0$ , on pose  $J(x) = \int_{x/2}^x f(t) dt$  et  $\psi(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

**21** Justifier que  $J$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et exprimer pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$   $J(x)$  en fonction de la fonction  $\psi$ .  
 $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc sur  $\left[\frac{x}{2}, x\right]$  quelque soit  $x > 0$ . Donc  $J$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

On a :

$$J(x) = \int_{x/2}^x f(t) dt = \int_1^x f(t) dt - \int_1^{x/2} f(t) dt = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

**22** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \sinh(x) \cosh(x).$$

**23** Utiliser les deux questions précédentes pour montrer que  $J$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et que :

$$\forall x > 0, J'(x) = f(x) \times \left(1 - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$f$  étant continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\psi$  est une primitive de  $f$  donc est dérivable donc d'après 21,  $J$  est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables et pour tout  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} J'(x) &= f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \frac{x}{2} \sinh\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= f(x) - \frac{1}{2} x \sinh\left(\frac{1}{x}\right) \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \times \left(1 - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

**24** Etudier le signe de  $J'$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; on exprimera le ou les zéros de  $J'$  à l'aide de la fonction  $\ln$ .  
 $f$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc pour  $x > 0$  :

$$J'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{1/x} + e^{-1/x}}{4} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0$$

en posant  $X = e^{1/x}$ . Or  $\Delta = 16 - 4 = 12$ , les racines sont  $X = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$  (toutes deux positives) donc :

$$J'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1/x} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(2 \pm \sqrt{3})} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$$

car  $\frac{1}{\ln(2 - \sqrt{3})} < 0$ . Et enfin, vu que  $\cosh\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) = 2$  :

$$\begin{aligned} J'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \\ &\Leftrightarrow x \geq \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

d'où :

|         |             |                     |             |
|---------|-------------|---------------------|-------------|
| $x$     | -0          | $\ln(2 + \sqrt{3})$ | $+\infty$   |
| $J'(x)$ | $\parallel$ | -                   | $\parallel$ |
| $J(x)$  | $\parallel$ | $\searrow$          | $\nearrow$  |

**25a** Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sinh(x) \geq \frac{e^x - 1}{2}$ .

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $e^{-x} \leq 1$  donc  $-e^{-x} \geq -1$  donc  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq \frac{e^x - 1}{2}$ .

**25b** En déduire que pour tout  $x > 0$  :

$$\forall t \in \left[\frac{x}{2}, x\right], f(t) \geq \frac{x}{2} (e^{1/x} - 1)$$

Donc pour tout  $x > 0$  et pour tout  $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$ ,  $f$  étant décroissante :

$$f(t) \geq f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \frac{e^{1/x} - 1}{2}.$$

**25c** En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$ .

Donc pour tout  $x > 0$ , par intégration d'inégalités :

$$J(x) \geq \int_{x/2}^x x \frac{e^{1/x} - 1}{2} dt = \frac{x^2}{4} (e^{1/x} - 1)$$

Par croissance comparée,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$  et d'autre part  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  donc par compo-

sition,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4} e^{1/x} = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4} (e^{1/x} - 1) = +\infty$ .

Donc par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$ .

**26a** Justifier que pour tout  $x > 0$  :  $\sinh(x) \geq x$ .

Il suffit d'étudier sur  $\mathbb{R}^+$  la fonction  $r(x) = \sinh(x) - x$ . (...).

**26b** En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $J(x) \geq \frac{x}{2}$ . Donner alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x)$ .

On a donc pour tout  $x > 0$  et pour tout  $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$ ,  $f(t) = t \sinh\left(\frac{1}{t}\right) \geq 1$  donc par intégration d'inégalités :

$$J(x) \geq \int_{x/2}^x dt = \frac{x}{2}$$

donc par théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ .

**26c** Donner un équivalent de  $\sinh(x) - x$  quand  $x$  tend vers 0. En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]0, \delta], \quad \sinh(x) \leq x + \frac{x^3}{4}.$$

On a  $\sinh(x) - x = \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \sim_0 \frac{x^3}{6}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - x}{x^3} = \frac{1}{6} < \frac{1}{4}$  donc au voisinage de 0, c'est-à-dire pour  $x \in ]0, \delta]$  pour un certain  $\delta > 0$ , on a :

$$\frac{\sinh(x) - x}{x^3} > \frac{1}{4}$$

donc il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]0, \delta], \quad \sinh(x) \leq x + \frac{x^3}{4}$$

**26d** Montrer alors que pour tout  $x \in \left[\frac{2}{\delta}, +\infty\right[$  :  $J(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{4x}$ .

Conclure que la courbe représentative de  $J$  admet une asymptote oblique (que l'on précisera) en  $+\infty$  et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Soit  $x \in \left[\frac{2}{\delta}, +\infty\right[$ . Alors pour tout  $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$ , on a  $t \geq \frac{x}{2}$  donc  $\frac{1}{t} \leq \frac{2}{x} \leq \delta$  donc  $\frac{1}{t} \in ]0, \delta]$  donc :

$$\sinh\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{4t^3}$$

donc

$$t \sinh\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1 + \frac{1}{4t^2}$$

donc par intégration d'inégalités :

$$J(x) \leq \int_{x/2}^x \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) dt = \left[t - \frac{1}{4t}\right]_{x/2}^x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4x}$$

Donc pour tout  $x \in \left[\frac{2}{\delta}, +\infty\right[$  :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &\leq J(x) \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{4x} \\ 0 &\leq J(x) - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{4x} \end{aligned}$$

donc par encarement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( J(x) - \frac{x}{2} \right) = 0$  donc  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  et cette courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

**27** Tracer la courbe représentative de  $J$ .

On donne pour le tracé  $\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \approx 0,76$  et  $J\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ .