

D.S.5 1er Février 2025

AUTRE POSSIBILIT2 prendre pb sur les matrices stochastiques de Begyn dans kasse2018
arranger avec preuve sur les limites d'un produit de 2 matrices DS ? 2022-23 je crois et faire ça
après chapitre 11 et 14 en ayant retardé la chapitre 11 après le 12 et le 13. GENIAL !!!

Exercice 1 : polynomes de Bernstein

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [0, n]$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

1 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0, n]$, déterminer le degré de $B_{n,k}$, son coefficient dominant, ainsi que ses racines et leurs multiplicités.

Traiter les cas $k = 0$ et $k = n$ à part.

2 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n B_{n,k}$.

3 En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in [0, n]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$.

4a Pour $k \in [1, n]$, exprimer $k \binom{n}{k}$ en fonction d'un autre coefficient binomial.

4b En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^n k B_{n,k}$.

5 Généraliser en calculant $k(k-1) \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}$ puis $\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [1, n-1]$, exprimer la dérivée de $B_{n,k}$ comme combinaison linéaire de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ (ie sous la forme $\lambda B_{n-1,k-1} + \mu B_{n-1,k}$ pour des scalaires λ et μ dépendant éventuellement de n et k).

7 Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que $\sum_{k=0}^n \alpha_k B_{n,k} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. et on cherche à montrer que pour tout $k \in [0, n]$, $\alpha_k = 0$. On raisonne par l'absurde.

7a Justifier que $\{k \in [0, n] \mid \alpha_k \neq 0\}$ admet un minimum.

7b On note k_0 ce minimum. Trouver une contradiction (indication: penser aux racines de ces polynômes).

8 Montrer que l'application suivante est injective :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \end{array} \right. .$$

Exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) :

$$(E_n) : x - \ln(x) = n$$

On définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1 Etude de la fonction f_n .

1a Etudier les variations de f_n sur son ensemble de définition.

1b Déterminer les solutions, si elles existent, de (E_0) et de (E_1) .

2 Une première suite :

2a Justifier que pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1[$.

2b Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

2c Justifier que la suite (x_n) converge. On notera l sa limite.

2d Quelle est la valeur de l ?

2e Montrer que $x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$.

2f Montrer qu'on a le développement asymptotique suivant :

$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o_{+\infty}(e^{-2n})$$

2g Pour tout $n \geq 2$, on définit la somme $S_n = \sum_{k=2}^n x_k$.

2g1 Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$.

2g2 Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\text{si } n \geq n_0, \text{ alors } x_n \leq \frac{3}{2}e^{-n}$$

2g3 Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ converge.

3 Une seconde suite :

3a Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution y_n dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

3b Calculer $f_n(n)$ et $f_n(2n)$ et en déduire $n \leq y_n \leq 2n$ (pour tout $n \geq 2$).

3c La suite $(y_n)_{n \geq 2}$ converge-t-elle ?

3d Montrer que $y_n \sim_{+\infty} n$.

3e Montrer qu'on a le développement asymptotique :

$$y_n = n + \ln_2(n) + o_{+\infty}(\ln(n))$$

Problème sur les matrices nilpotentes

On note I_n la matrice unité de taille $n \geq 2$ et $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la matrice carrée nulle de taille n .

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A^0 = I_n$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $s \in \mathbb{N}^*$ (dépendant de A) tel que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel non nul s tel que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est appelé l'indice de nilpotence de A et est noté n_A . On a donc $A^{n_A} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{n_A-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Partie 1: ensemble des matrices nilpotentes.

1 Exemple: soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1a Montrer que A et B sont nilpotentes.

1b Montrer que AB ne l'est pas.

1c Montrer que $A + B$ non plus.

1d En s'inspirant de ce qui précède, donnez deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes mais **on ne demande aucune démonstration de ces points :**

- A et B sont nilpotentes
- AB ne l'est pas
- $A + B$ non plus.

2 On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont toutes deux nilpotentes d'indices de nilpotence n_A et n_B et que $AB = BA$.

2a Montrer que AB est nilpotente.

2b Montrer que $A+B$ est nilpotente avec un indice de nilpotence n_{A+B} vérifiant $n_{A+B} \leq n_A + n_B - 1$.

Partie 2: nilpotence et inversibilité.

1 Justifier que si A est nilpotente, alors A n'est pas inversible.

2 Soit A une matrice carrée de taille n nilpotente et s un entier vérifiant $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $M = I_n - A$: montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} comme somme de puissances de A . Indication: on écrira $I_n = I_n - A^s = I_n^s - A^s$.

3 Exemple: on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = I_n - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3a Calculer J^k pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Que constate-t-on pour $k = n$?

3b Justifier que M est inversible et donner l'expression de M^{-1} .

4 Autre méthode: on considère encore la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Retrouver les résultats du 3.d. en résolvant un système.

5 Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.

Montrer que $\lambda = 0$.

Partie 3 : Exponentielle. Pour toute matrice nilpotente A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

On remarque que cette somme est bien définie puisqu'elle comporte un nombre fini de termes non nuls ($A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ pour $k \geq n_A$).

Soient A et B des matrices nilpotentes vérifiant $AB = BA$. Montrer l'égalité :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

Corrigé exercice polynomes de Bernstein Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$.

1 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer le degré de $B_{n,k}$, son coefficient dominant, ainsi que ses racines et leurs multiplicités.

Traiter les cas $k = 0$ et $k = n$ à part.

- Si $k = 0$, $B_{n,k} = (1 - X)^n = (-1)^n (X - 1)^n$ c'est un polynôme de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n$ de seule racine 1, de multiplicité n .
- Si $k = n$, $B_{n,k} = X^n$ est un polynôme de degré n , de coefficient dominant 1, de seule racine 0, dont la multiplicité est n .
- Si $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on a $\deg(B_{n,k}) = k + n - k = n$ et $B_{n,k} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k} X^k (X - 1)^{n-k}$ a pour coefficient dominant $(-1)^{n-k} \binom{n}{k}$ et pour racines 0, de multiplicité k et 1, de multiplicité $n - k$.

2 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n B_{n,k}$.

On a $\sum_{k=0}^n B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = (X + 1 - X)^n = 1^n = 1$ (binome de Newton).

3 En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $x \in [0, 1]$. Alors $0 \leq 1 - x$ et $0 \leq x$ donc $0 \leq \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$ donc $0 \leq B_{n,k}(x)$.

Or $1 = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n B_{n,j}(x) + B_{n,k}(x) \geq B_{n,k}(x)$ car pour tout j , $B_{n,j}(x) \geq 0$.

Donc $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$.

4a Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $k \binom{n}{k}$ en fonction d'un autre coefficient binomial.

On a $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k! (n - k)!} = \frac{n(n - 1)!}{(k - 1)! ((n - 1) - (k - 1))!} = n \binom{n - 1}{k - 1}$.

4b En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^n k B_{n,k}$.

Attention à $k = 0$ même si le terme correspondant est nul!!! On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k B_{n,k} &= \sum_{k=1}^n k B_{n,k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} X^k (1 - X)^{n-k} \\ &= nX \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1 - X)^{n-k} = nX \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1 - X)^{n-1-j} \\ &= nX \sum_{j=0}^{n-1} B_{n-1,j} = nX \text{ d'après 3} \end{aligned}$$

5 Généraliser en calculant $k(k-1) \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}$ puis $\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}$.

Pour $k \in [2, n]$, on a $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) B_{n,k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n(n-1) X^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^{k-2} (1-X)^{n-k} \\ &= n(n-1) X^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} X^j (1-X)^{n-2-j} \\ &= n(n-1) X^2 \sum_{j=0}^{n-2} B_{n-2,j} = n(n-1) X^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k} &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) B_{n,k} + k B_{n,k}) \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k} + \sum_{k=0}^n k B_{n,k} \\ &= n(n-1) X^2 + nX \end{aligned}$$

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [1, n-1]$, exprimer la dérivée de $B_{n,k}$ comme combinaison linéaire de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ (ie sous la forme $\lambda B_{n-1,k-1} + \mu B_{n-1,k}$ pour des scalaires λ et μ dépendant de n et k).
On a :

$$\begin{aligned} B'_{n,k} &= k \binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k} - (n-k) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} - (n-k) \binom{n}{n-k} X^k (1-X)^{n-1-k} \\ &= n B_{n-1,k-1} - n \binom{n-1}{n-1-k} X^k (1-X)^{n-1-k} \\ &= n B_{n-1,k-1} - n B_{n-1,k} \end{aligned}$$

7 Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que $\sum_{k=0}^n \alpha_k B_{n,k} = 0$ et on cherche à montrer que pour tout

$k \in [0, n]$, $\alpha_k = 0$. On raisonne par l'absurde.

7a Justifier que $\{k \in [0, n] \mid \alpha_k \neq 0\}$ admet un minimum.

On raisonne par l'absurde, ceci nous dit que cet ensemble est non vide. Comme il est de plus fini, il admet un plus petit élément.

7b On note k_0 ce minimum. Trouver une contradiction.

$$\text{On a donc } \sum_{k=k_0}^n \alpha_k B_{n,k} = 0 \text{ donc } \alpha_{k_0} B_{k_0} = - \sum_{k=k_0+1}^n \alpha_k B_{n,k}.$$

Or 0 est racine de B_{k_0} donc de $\alpha_{k_0} B_{k_0}$ (car $\alpha_{k_0} \neq 0$) de multiplicité exactement k_0 mais aussi, 0 est racine de multiplicité au moins $k_0 + 1$ de chacun des $B_{n,k}$ pour $k \in [k_0 + 1, n]$, ie dans le $\sum$ du second membre. Donc le second membre est factorisable par X^{k_0+1} , et pas $\alpha_{k_0} B_{k_0}$. C'est une contradiction.

Par conséquent, pour tout $k \in [0, n]$, $\alpha_k = 0$.

8 Montrer que l'application suivante est injective :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \end{cases}.$$

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(P) = \Phi(Q)$. Alors $\sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = \sum_{k=0}^n Q\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ donc

$$\sum_{k=0}^n (P - Q)\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = 0.$$

D'après la question 7, il en résulte pour tout $k \in [0, n]$, $(P - Q)\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Donc $P - Q$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes. Or $\deg(P - Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$ donc $P - Q = 0$ donc $P = Q$.

Donc Φ est injective.

Corrigé de l'exercice 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) :

$$(E_n) : x - \ln(x) = n$$

On définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1 Etude de la fonction f_n .

1a Etudier les variations de f_n sur son ensemble de définition.

f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'_n(x) = 1 - \frac{1}{x}$ donc

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Donc f_n est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

1b Déterminer les solutions, si elles existent, de (E_0) et de (E_1) .

On sait que $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1 < x$ donc $x - \ln(x) > 0$ donc l'équation $(E_0) : x - \ln(x) = 0$ n'admet pas de solution. C'est aussi ce que montrent les variations de f_0 qui a pour minimum $f_0(1) = 1$.

Et les variations de f_1 montrent que f_1 admet en 1 un minimum qui vaut $f_1(1) = 0$. C'est un minimum strict car f'_1 ne s'annule pas en-dehors de 1 donc les monotonies de f'_1 sur les deux intervalles cités sont strictes.

Ainsi, (E_1) admet pour unique solution $x = 1$.

2 Une première suite :

2a Justifier que pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1[$.
 f'_n ne s'annule qu'en $x = 1$ donc f'_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et continue donc d'après le théorème de la bijection continue strictement monotone, f_n induit une bijection de $]0, 1[$ sur l'intervalle $J = \left[f_n(1), \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) \right[= [1 - n, +\infty[$. Or $n \geq 2$ donc $1 - n < 0$ donc $0 \in J$. Donc 0 admet un unique antécédent x_n par f_n dans $]0, 1[$.
Enfin, cet antécédent n'est pas 1 car $f_n(1) = 1 - n \neq 0$. Donc l'équation (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1[$.

2b Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
On a $f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - n - 1 = -1$ car x_n est solution de (E_n) .
Donc $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Comme f_{n+1} est décroissante sur $]0, 1[$, il en résulte $x_{n+1} \leq x_n$. Donc la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

2c Justifier que la suite (x_n) converge. On notera l sa limite.
La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone, de limite $l \in [0, 1]$.

2d Quelle est la valeur de l ?
Supposons $l > 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n) = \ln(l)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - \ln(x_n)) = l - \ln(l)$.
Or $x_n - \ln(x_n) = n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - \ln(x_n)) = +\infty$.
Ceci est absurde. Or $l \geq 0$. Donc $l = 0$.

2e Montrer que $x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$.

On a :

$$\frac{x_n}{e^{-n}} = x_n e^n = x_n e^{x_n - \ln(x_n)} = x_n e^{x_n} \frac{1}{x_n} = e^{x_n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^{-n}} = 1$ donc $x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$.

2f Montrer qu'on a le développement asymptotique suivant :

$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o_{+\infty}(e^{-2n})$$

Posons $\alpha_n = x_n - e^{-n}$. Alors $x_n - \ln(x_n) = n$ donc :

$$x_n - \ln(\alpha_n + e^{-n}) = n$$

$$x_n - \ln\left(e^{-n} \left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right)\right) = n$$

$$x_n + n - \ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) = n$$

$$\ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) = x_n$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{e^{-n}} = 0$ donc par substitution dans

$\ln(1 + X) \sim_0 X$, on a $\ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{\alpha_n}{e^{-n}}$.

Donc il vient :

$$\frac{\alpha_n}{e^{-n}} \sim_{+\infty} x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$$

donc $\alpha_n \sim_{+\infty} e^{-2n}$ donc $\alpha_n = e^{-2n} + o_{+\infty}(e^{-2n})$ donc $x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o_{+\infty}(e^{-2n})$.

2g Pour tout $n \geq 2$, on définit la somme $S_n = \sum_{k=2}^n x_k$.

2g1 Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$.

On a $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=2}^{n+1} x_k - \sum_{k=2}^n x_k = x_{n+1} \geq 0$ donc $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

2g2 Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\text{si } n \geq n_0, \text{ alors } x_n \leq \frac{3}{2}e^{-n}$$

On a $x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^{-n}} = 1 < \frac{3}{2}$ donc APCR, $\frac{x_n}{e^{-n}} \leq \frac{3}{2}$ ie il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $x_n \leq \frac{3}{2}e^{-n}$.

2g3 Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ converge.

Alors pour tout $n \geq n_0$, par le relation de Chasles :

$$S_n = S_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^n x_k \leq S_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^n \frac{3}{2}e^{-k} = S_{n_0-1} + \frac{3}{2}e^{-n_0} \frac{1 - e^{-(n-n_0+1)}}{1 - e^{-1}}$$

(somme géométrique de raison e^{-1}). Donc $S_n \leq S_{n_0-1} + \frac{3}{2}e^{-n_0} \frac{1}{1 - e^{-1}}$. Ce majorant est bien INDEPENDANT DE n , donc cela montre que (S_n) est majorée. Or elle est croissante donc elle converge (théorème de la limite monotone).

3 Une seconde suite :

3a Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution y_n dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
 f_n est strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$ donc induit une bijection de $]1, +\infty[$ sur $K = \left] f_n(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[$. Or $f_n(x) = x - \ln(x) - n = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) - n$ et par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Et $f_n(1) = 1 - n < 0$ donc $0 \in K$ donc 0 admet par f_n un unique antécédent $y_n \in]1, +\infty[$.

3b Calculer $f_n(n)$ et $f_n(2n)$ et en déduire $n \leq y_n \leq 2n$ (pour tout $n \geq 2$).

On a $f_n(n) = n - \ln(n) - n = -\ln(n) < 0$ et $f_n(2n) = 2n - \ln(2n) - n = n - \ln(n) - \ln(2)$.

Or $\ln(n) \leq n - 1$ donc $n - \ln(n) - \ln(2) \geq 1 - \ln(2) > 0$ car $2 \leq e$.

Enfin, $f_n(y_n) = 0$ donc $f_n(n) \leq f_n(y_n) \leq f_n(2n)$ et f_n est croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qui contient n, y_n et $2n$. Donc $n \leq y_n \leq 2n$.

3c La suite $(y_n)_{n \geq 2}$ converge-t-elle ?

Par théorème de comparaison, vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$. Donc $(y_n)_{n \geq 2}$ diverge, elle ne converge pas !

3d Montrer que $y_n \sim_{+\infty} n$.

On a $f_n(y_n) = 0$ donc $y_n = n + \ln(y_n)$ donc $\frac{y_n}{n} = 1 + \frac{\ln(y_n)}{n}$. Or $n \leq y_n \leq 2n$ donc

$$\ln(n) \leq \ln(y_n) \leq \ln(2n) \text{ donc } \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{\ln(y_n)}{n} \leq \frac{\ln(2n)}{n} = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

Puisque par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, on a par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y_n)}{n} = 0$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{n} = 1$ donc $y_n \sim_{+\infty} n$.

3e Montrer qu'on a le développement asymptotique :

$$y_n = n + \ln(n) + o_{+\infty}(\ln(n))$$

On a $y_n - n = \ln(y_n)$. Or $\frac{\ln(y_n)}{\ln(n)} - 1 = \frac{\ln(y_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{y_n}{n}\right)}{\ln(n)}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y_n)}{\ln(n)} = 1$
donc $\ln(y_n) = \ln(n) + o_{+\infty}(\ln(n))$. Donc :

$$y_n = n + \ln(n) + o_{+\infty}(\ln(n))$$

Corrigé du problème sur les matrices nilpotentes :

On note I_n la matrice unité de taille n et $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la matrice carrée nulle de taille n .

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A^0 = I_n$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $s \in \mathbb{N}^*$ (dépendant de A) tel que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel non nul s tel que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est appelé l'indice de nilpotence de A et est noté n_A . On a donc $A^{n_A} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{n_A-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Partie 1: ensemble des matrices nilpotentes.

1 Exemple: soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1a Montrer que A et B sont nilpotentes.

On a : $A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A et B sont nilpotentes.

1b Montrer que AB ne l'est pas.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc on vérifie facilement (par récurrence) que $(AB)^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui n'est jamais nul. Donc AB n'est pas nilpotente.

1c Montrer que $A + B$ non plus.

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. On en déduit facilement que $(A + B)^s = A + B$ pour s impair et $(A + B)^s = I_2$ pour s pair.
Ainsi, $A + B$ n'est jamais nulle. Donc $A + B$ n'est pas nilpotente.

1d En s'inspirant de ce qui précède, donnez deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes mais **on ne demande aucune démonstration de ces points** :

- A et B sont nilpotentes

- AB ne l'est pas
- $A + B$ non plus.

On peut prendre par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

2a Montrer que AB est nilpotente.

On a : $AB = BA$ donc $(AB)^s = A^s B^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ dès que $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc (AB) est nilpotente.

2b Montrer que $A+B$ est nilpotente avec un indice de nilpotence n_{A+B} vérifiant $n_{A+B} \leq n_A + n_B - 1$.

On a $AB = BA$ donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$(A + B)^{n_A + n_B - 1} = \sum_{k=0}^{n_A + n_B - 1} \binom{n_A + n_B - 1}{k} A^k B^{n_A + n_B - 1 - k} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

car $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ pour $k \geq n_A$ et si $k < n_A$, alors $n_A + n_B - 1 - k > n_B - 1$ donc $n_A + n_B - 1 - k \geq n_B$ donc $B^{n_A + n_B - 1 - k} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc $(A + B)$ est nilpotente d'indice $n_{A+B} \leq n_A + n_B - 1$.

Partie 2: nilpotence et inversibilité.

1 Justifier que si A est nilpotente, alors A n'est pas inversible.

Soit A nilpotente. Alors $A^{n_A} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Supposons A inversible. Alors A^{n_A} est aussi inversible, ce qui est absurde car la matrice nulle ne l'est bien sûr pas.

Donc A n'est pas inversible.

2 Soit A une matrice carrée de taille n nilpotente et s un entier vérifiant $A^s = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $M = I_n - A$: montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} comme somme de puissances de A . Indication: on écrira $I_n = I_n - A^s = I_n^s - A^s$.

On a :

$$I_n = I_n - A^s = I_n^s - A^s = (I_n - A) (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{s-1})$$

car $I_n A = A I_n$, et on a aussi $I_n = (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{s-1}) (I_n - A)$.

Donc $M = I_n - A$ est inversible et $M^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{s-1}$.

Exemple: on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = I_n - J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 3a** En déduire la matrice J^k pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Que constate-t-on pour $k = n$?
On montre par récurrence bornée (à détailler) sur $k \in \{1, \dots, n\}$ que :

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où la seule série de 1 commence à la première ligne et colonne $k + 1$ et finit ligne k , dernière colonne.

En particulier, pour $k = n$, on a $J^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc J est nilpotente.

- 3b** Justifier que M est inversible et donner l'expression de M^{-1} .

D'après 2., $M = I_n - J$ est donc inversible et $M^{-1} = I_n + J + J^2 + \cdots + J^{n-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 4** Autre méthode: on considère encore la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Retrouver les résultats du 3.d. en résolvant un système.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a:

$$\begin{aligned} MX &= Y \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ \vdots \\ x_{n-2} = y_{n-2} + y_{n-1} + y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce système admet une unique solution donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.

Montrer que $\lambda = 0$.

On montre par récurrence sans difficulté sur $k \in \mathbb{N}$ que $A^k X = \lambda^k X$ (même pour $k = 0$ car $A^0 = I_n$).

Or $A^{n_A} = (0)$ donc $A^{n_A} X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\lambda^{n_A} X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mais avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\lambda^{n_A} X = \begin{pmatrix} \lambda^{n_A} x_1 \\ \vdots \\ \lambda^{n_A} x_n \end{pmatrix}.$$

Or X est non nulle donc l'un des x_i est non nul et $\lambda^{n_A} x_i = 0$ dnc $\lambda^{n_A} = 0$ donc $\lambda = 0$.

Partie 3 : Exponentielle. Pour toute matrice nilpotente A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

On remarque que cette somme est bien définie puisqu'elle comporte un nombre fini de termes non nuls ($A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ pour $k \geq n_A$).

Soient A et B des matrices nilpotentes vérifiant $AB = BA$. Montrer l'égalité :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

On a :

$$\exp(A) \exp(B) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} A^i \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} B^j$$

Ces deux sommes sont en réalité des sommes finies et ce calcul est donc un développement ordinaire de produit de deux sommes.

En développant ce produit on obtient un nombre fini de termes tous de la forme $\frac{1}{i!} A^i \frac{1}{j!} B^j$ où il suffit de prendre en compte $i < n_A$ et $j < n_B$. Ainsi :

$$\exp(A) \exp(B) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j$$

car là encore les termes pour $i \geq n_A$ ou $j \geq n_B$ ne comptent pas (ils sont nuls).

D'autre part :

$$\exp(A + B) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A + B)^k$$

et puisque A et B commutent, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\exp(A+B) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i! (k-i)!} A^i B^{k-i}$$

Or si l'on pose $j = k - i$, on a $j \geq 0 \Leftrightarrow i \leq k$ donc pour k fixé $\sum_{i=0}^k \frac{1}{i! (k-i)!} A^i B^{k-i} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j$ donc $\sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i! (k-i)!} A^i B^{k-i}$ donc :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B).$$