

D.S.7 (2h30) 29 Mars 2025

Exercice : CET EXO PEUT ETRE ALLONGÉ en considérant $\theta(f) = x \mapsto x(f'(x) - f(x))$, c'est un endomorphisme de E , et on pourrait l'étudier !! Et résoudre une equa diff

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies sur $\mathbb{R}^*$ et on définit :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{ae^x}{x} + be^x + cxe^x \right\}$$

- 1 Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, de dimension finie en précisant une famille génératrice $(f_1, \dots, f_p)$ de E (on précisera la valeur de p).
- 2 Montrer que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.
Il en résulte que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p)$ est une base de E .
- 3 Justifier qu'il existe un unique endomorphisme Φ de E tel que :

$$\begin{aligned}\Phi(f_1) &= f_1 - 4f_2 + 8f_3 \\ \Phi(f_2) &= 4f_1 - 9f_2 + 16f_3 \\ \Phi(f_3) &= 2f_1 - 4f_2 + 7f_3\end{aligned}$$

puis donner la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

- 4 Montrer que Φ est une symétrie.
- 5 Déterminer une base des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que Φ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .
- 6 Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans-laquelle la matrice de Φ est diagonale. On notera D cette matrice.
- 7 Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ainsi que son inverse P^{-1} .
- 8 En déduire comment calculer A^n pour tout entier naturel n . On pourra n'effectuer les calculs de manière explicite que jusqu'à l'obtention de la première colonne de A^n .

Problème 1 : Coeur et nilspace d'un endomorphisme Dans tout ce problème, $\mathbb{k}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si E est un espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Si u est un endomorphisme de E , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation u^n désigne l'endomorphisme de E défini par récurrence par $u^0 = Id_E$ et $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$.

Partie 1 : résultats préliminaires : On se donne E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et u un endomorphisme de E .

1a Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$.

1b Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$.

2 On suppose **dans cette question seulement** que E est de dimension finie.

Montrer qu'il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

$$(i) : E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$$

$$(ii) : \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$$

$$(iii) : \ker(u) = \ker(u^2)$$

Indication : on prouvera $(i \Rightarrow ii)$, $(ii \Rightarrow iii)$ et $(iii \Rightarrow i)$.

3 E n'est plus supposé de dimension finie.

3a Montrer que $E = \ker(u) + \operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$.

3b Montrer que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \ker(u) = \ker(u^2)$.

3c Montrer que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2) \text{ et } \ker(u) = \ker(u^2))$.

Partie 2 : un exemple : Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$ et u est l'application définie par :

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto u(x, y, z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z)$$

4a Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

4b Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\operatorname{Im}(u)$.

4c En déduire que la propriété $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$ est fausse.

5a Déterminer une base de $\ker(u^2)$ et une base de $\operatorname{Im}(u^2)$.

5b Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u^2) \oplus \operatorname{Im}(u^2)$.

Partie 3 : Cas général : Dans cette partie, E est un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

Attention, dans cette partie, E n'est pas supposé de dimension finie.

On appelle *coeur* de l'endomorphisme u , noté C , la partie de E définie par : pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\vec{x} \in C \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \text{Im}(u^k)$$

On appelle *nilespace* de l'endomorphisme u , noté N , la partie de E définie par : pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\vec{x} \in N \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \vec{x} \in \ker(u^k)$$

Enfin, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par u si et seulement si $\forall \vec{x} \in F, u(\vec{x}) \in F$.

6 Soient n, k deux entiers naturels. Montrer que $\ker(u^k)$ et $\text{Im}(u^k)$ sont stables par u^n .

7 On rappelle que d'après la partie 1 :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1}) \text{ et } \text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k).$$

7a Montrer que C et N sont des sous-espaces vectoriels de E .

7b Montrer que C et N sont stables par u .

7c Montrer que u surjectif $\Leftrightarrow C = E$.

7d Montrer que u injectif $\Leftrightarrow N = \{\vec{0}\}$.

8 On suppose dans les questions 8a et 8b qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^{k+1})$.

8a Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N} : \text{Im}(u^{k+n}) = \text{Im}(u^k)$.

8b On note r **le plus petit** entier k non nul tel que $\text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^{k+1})$. Montrer que :

8bi : $C = \text{Im}(u^r)$

8bii $u(C) = C$

8biii $E = \ker(u^r) + \text{Im}(u^r)$ (utiliser la partie 1).

9 On suppose dans les questions 9a et 9b qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$.

9a Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N} : \ker(u^{k+n}) = \ker(u^k)$.

9b On note s **le plus petit** entier k non nul tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$. Montrer que :

9bi $N = \ker(u^s)$.

9bii $\ker(u^s) \cap \text{Im}(u^s) = \{\vec{0}\}$ (utiliser la partie 1).

Exercice : On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies sur $\mathbb{R}^*$ et on définit :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{ae^x}{x} + be^x + cxe^x \right\}$$

- 1 Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, de dimension finie en précisant une famille génératrice $(f_1, \dots, f_p)$ de E (on précisera la valeur de p).
Notons f_1, f_2, f_3 les fonctions de E définies par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f_1(x) &= \frac{e^x}{x} \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, f_2(x) &= e^x \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, f_3(x) &= xe^x \end{aligned}$$

Alors $f \in E \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \mid f = af_1 + bf_2 + cf_3 \Leftrightarrow f \in \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Donc $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de E , qui est donc de dimension finie (et $\dim(E) \leq 3$).

- 2 Montrer que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

Il en résulte que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p)$ est une base de E .

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\lambda_1 \frac{e^x}{x} + \lambda_2 e^x + \lambda_3 x e^x = 0$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, la limite quand x tend vers 0^+ donne $+\infty = 0$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_1 = 0$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\lambda_2 e^x + \lambda_3 x e^x = 0$$

La limite quand x tend vers 0 donne alors $\lambda_2 = 0$. Donc pour tout $x \neq 0$, $\lambda_3 x e^x = 0$. Prendre $x = 1$ donne alors $\lambda_3 = 0$.

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (f_1, f_2, f_3) est libre.

- 3 Justifier qu'il existe un unique endomorphisme Φ de E tel que :

$$\begin{aligned} \Phi(f_1) &= f_1 - 4f_2 + 8f_3 \\ \Phi(f_2) &= 4f_1 - 9f_2 + 16f_3 \\ \Phi(f_3) &= 2f_1 - 4f_2 + 7f_3 \end{aligned}$$

puis donner la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

Une application linéaire de E dans E est entièrement déterminée par l'image d'ailleurs arbitraire (dans E quand même!!) des éléments d'une base de E . Or $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E et $f_1 - 4f_2 + 8f_3, 4f_1 - 9f_2 + 16f_3, 2f_1 - 4f_2 + 7f_3 \in E$ donc il existe bien un unique endomorphisme Φ de E déterminé par les images $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$ et $\Phi(f_3)$ demandées.

Etant donné la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a immédiatement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & -9 & -4 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

4 Montrer que Φ est une symétrie.

On calcule A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & -9 & -4 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & -9 & -4 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-16+16 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il est bienvenu de détailler un peu plus le calcul en remplissant les $\dots$

Φ est donc linéaire et vérifie $\Phi \circ \Phi = Id_E$ donc Φ est une symétrie.

5 Déterminer une base des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que Φ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

On a $F = \ker(\Phi - Id_E)$ et $G = \ker(\Phi + Id_E)$.

Or pour $f \in E$, $f = af_1 + bf_2 + cf_3$, on a :

$$\begin{aligned} f \in F &\Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -10 & -4 \\ 8 & 16 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 2c = 0 \\ -4a - 10b - 4c = 0 \\ 8a + 16b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 2c = 0 \\ -4a - 10b - 4c = 0 \\ -4b - 2c = 0 \end{cases} \quad L_3 + 2L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 2c = 0 \\ -4a - 10b - 4c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ -4a - 10b + 8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = -\frac{1}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow f = -\frac{1}{2}bf_1 + bf_2 - 2bf_3 = b \left(-\frac{1}{2}f_1 + f_2 - 2f_3 \right) \\ &\Leftrightarrow f \in Vect \left(-\frac{1}{2}f_1 + f_2 - 2f_3 \right) \end{aligned}$$

Donc $F = Vect(g_1)$, où l'on pose $g_1 = -\frac{1}{2}f_1 + f_2 - 2f_3$.

F est une droite vectorielle de base (g_1) (cette application est non nulle car $\left(\frac{-1}{2}, 1, -2\right) \neq (0, 0, 0)$).

D'autre part :

$$\begin{aligned} f \in G &\Leftrightarrow (A + I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \\ 8 & 16 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b + 2c = 0 \\ -4a - 8b - 4c = 0 \\ 8a + 16b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 4L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow a + 2b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -2b - c \Leftrightarrow f = (-2b - c)f_1 + bf_2 + cf_3 \Leftrightarrow f = b(-2f_1 + f_2) + c(-f_1 + f_3) \end{aligned}$$

Donc $G = Vect(g_2, g_3)$, où l'on pose $g_2 = -2f_1 + f_2$ et $g_3 = -f_1 + f_3$.

g_2 et g_3 sont non colinéaires car $(-2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne le sont pas.

Donc, étant libre et génératrice de G , (g_2, g_3) est une base de G .

$$\text{Vérif. Maple : } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -4 & -9 & -4 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}, \text{ eigenvectors: } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1.$$

- 6** Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de Φ est diagonale. On notera D cette matrice. Φ est une symétrie de E donc $F \oplus G = E$ donc $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, g_3)$ est une base de E comme réunion des bases de deux supplémentaires. De plus, $\Phi(g_1) = g_1$, $\Phi(g_2) = -g_2$ et $\Phi(g_3) = -g_3$ donc la matrice D de Φ dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 7** Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ainsi que son inverse P^{-1} .
On a $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_1, g_2, g_3)$ donc :

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La méthode standard de calcul de P^{-1} par résolution du système $PX = Y$ (à détailler bien sûr!!) donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

- 8** En déduire comment calculer A^n pour tout entier naturel n . On pourra n'effectuer les calculs de manière explicite que jusqu'à l'obtention de la première colonne de A^n .
La formule de changement de base pour les endomorphismes donne : $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$.
Ensuite, une récurrence classique (à détailler d'une manière ou d'une autre) donne $A^n = PD^nP^{-1}$.
De manière évidente (pas besoin de récurrence cette fois!) :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Donc :

$$D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ (-1)^n 2 & (-1)^n 5 & (-1)^n 2 \\ -(-1)^n 4 & -(-1)^n 8 & -(-1)^n 3 \end{pmatrix}$$

donc ;

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ (-1)^n 2 & (-1)^n 5 & (-1)^n 2 \\ -(-1)^n 4 & -(-1)^n 8 & -(-1)^n 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 2(-1)^n & (-1)^n \\ 2(-1)^n - 2 & 5(-1)^n - 4 & 2(-1)^n \\ 4 - 4(-1)^n & 8 - 8(-1)^n & 4 - 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Remarque : sans surprise, on peut observer que $A^n = A$ si n est impair et $A^n = I_3$ si n est pair puisque $A^2 = I_3$.

Corrigé du problème 1 : Dans tout ce problème, $\mathbb{k}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si E est un espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Si u est un endomorphisme de E , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation u^n désigne l'endomorphisme de E défini par récurrence par $u^0 = Id_E$ et $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$.

Partie 1 : résultats préliminaires : On se donne E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et u un endomorphisme de E .

1a Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$.

Vu en TD et en cours.

1b Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$.

Idem.

2 On suppose dans cette question seulement que E est de dimension finie.

Montrer qu'il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(i) : $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$

(ii) : $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$

(iii) : $\ker(u) = \ker(u^2)$

Indication : on prouvera $(i \Rightarrow ii)$, $(ii \Rightarrow iii)$ et $(iii \Rightarrow i)$.

$(i \Rightarrow ii)$ On suppose $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(u)$. Alors $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Et on peut décomposer $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in \ker(u)$ et $\vec{x}_2 \in \text{Im}(u)$. (peu importe l'unicité de cette décomposition). On a alors :

$$\vec{y} = u(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = u(\vec{x}_1) + u(\vec{x}_2) = u(\vec{x}_2)$$

Or $\exists \vec{x}_3 \in E$ tel que $\vec{x}_2 = u(\vec{x}_3)$ donc $\vec{y} = u^2(\vec{x}_3) \in \text{Im}(u^2)$.

Donc $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$ donc vu 1a, $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

$(ii \Rightarrow iii)$ On suppose $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$. Donc $rg(u) = rg(u^2)$.

Or d'après la formule du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= rg(u) + \dim(\ker(u)) \\ \text{et } \dim(E) &= rg(u^2) + \dim(\ker(u^2)) \end{aligned}$$

donc $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2))$. Sachant $\ker(u) \subset \ker(u^2)$, il vient $\ker(u) = \ker(u^2)$.

$(iii \Rightarrow i)$ On suppose $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Soit $\vec{y} \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors $u(\vec{y}) = \vec{0}$ et $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. On a $u^2(\vec{x}) = u(\vec{y}) = \vec{0}$ donc $\vec{x} \in \ker(u^2) = \ker(u)$ donc $\vec{y} = u(\vec{x}) = \vec{0}$. Donc $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\}$.

Or d'après la formule du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u))$ donc :

$$E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u).$$

3 E n'est plus supposé de dimension finie.

3a Montrer que $E = \ker(u) + \text{Im}(u) \Leftrightarrow \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

La preuve de $(\Rightarrow)$ est la même que ci-dessus, on n'utilisait pas que E était de dimension finie et pas non plus que la somme était directe. ⁷

Pour la réciproque, supposons $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Soit $\vec{x} \in E$. $u(\vec{x}) \in \text{Im}(u)$ donc $u(\vec{x}) \in \text{Im}(u^2)$ donc $\exists \vec{x}' \in E$ tel que $u(\vec{x}) = u^2(\vec{x}')$.

Alors $u(\vec{x} - u(\vec{x}')) = \vec{0}$ donc $\vec{x} - u(\vec{x}') \in \ker(u)$.

Or $\vec{x} = \vec{x} - u(\vec{x}') + u(\vec{x}')$ donc $\vec{x} \in \ker(u) + \text{Im}(u)$.

Donc $E \subset \ker(u) + \text{Im}(u)$ donc $E = \ker(u) + \text{Im}(u)$.

Ainsi, $E = \ker(u) + \text{Im}(u) \Leftrightarrow \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

3b Montrer que $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \ker(u) = \ker(u^2)$.

($\Rightarrow$) On suppose $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\}$.

Soit $\vec{x} \in \ker(u^2)$. Alors $u(u(\vec{x})) = \vec{0}$ donc $u(\vec{x}) \in \ker(u)$ mais on a aussi $u(\vec{x}) \in \text{Im}(u)$ et $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\}$ donc $u(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $\vec{x} \in \ker(u)$.

Donc $\ker(u^2) \subset \ker(u)$ et on a toujours l'inclusion inverse donc $\ker(u) = \ker(u^2)$.

($\Leftarrow$) On suppose $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Soit $\vec{y} \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors $u(\vec{y}) = \vec{0}$ et $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Donc $u^2(\vec{x}) = u(\vec{y}) = \vec{0}$ donc $\vec{x} \in \ker(u^2) = \ker(u)$ donc $\vec{y} = u(\vec{x}) = \vec{0}$.

Donc $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\}$.

Ainsi $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \ker(u) = \ker(u^2)$.

3c Montrer que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u) \Leftrightarrow (\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \text{ et } \ker(u) = \ker(u^2))$.

On a donc :

$$\begin{aligned} E &= \ker(u) \oplus \text{Im}(u) \Leftrightarrow (E = \ker(u) + \text{Im}(u) \text{ et } \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{\vec{0}\}) \\ &\Leftrightarrow (\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \text{ et } \ker(u) = \ker(u^2)) \end{aligned}$$

Partie 2 : un exemple : Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$ et u est l'application définie par :

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto u(x, y, z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z)$$

4a Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On a $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{pmatrix}$ donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

car c'est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

4b Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.

Soit $\vec{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} \vec{w} \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ -4x + y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = \frac{-y - z}{2} = -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \vec{w} = (-z, z, z) \Leftrightarrow \vec{w} \in \text{Vect}(\vec{a}) \text{ avec } \vec{a} = (-1, 1, 1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(u) = \text{Vect}(\vec{a})$.

D'après la formule du rang, on en déduit $\text{rg}(u) = 2$. Or $\text{Im}(u)$ est engendré par les vecteurs

(associés aux) colonnes de A . Les deux premières colonnes étant non colinéaires forment une famille libre de $\text{Im}(u)$, dont la dimension est 2, donc une base de $\text{Im}(u)$. On note $\vec{b} = (4, -2, -4)$ et la deuxième colonne est en fait $-\vec{a}$. Donc $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base de $\text{Im}(u)$.

4c En déduire que la propriété $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ est fausse.

On observe donc $\vec{a} \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$ donc ils ne sont pas en somme directe et la propriété $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ est fausse.

5a Déterminer une base de $\ker(u^2)$ et une base de $\text{Im}(u^2)$.

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{w} = (x, y, z) \in \ker(u^2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - 4z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z \\ &\Leftrightarrow \vec{w} = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \end{aligned}$$

donc $\ker(u^2) = \text{Vect}(\vec{a}', \vec{b}')$ avec $\vec{a}' = (1, 1, 0)$ et $\vec{b}' = (-2, 0, 1)$. Or ils sont non colinéaires donc $(\vec{a}', \vec{b}')$ est une base de $\ker(u^2)$.

D'autre part, les colonnes de A^2 sont tous proportionnelles à $(1, 1, 1)$ et engendrent $\text{Im}(u^2)$ donc $\vec{c}' = (1, 1, -1)$ est une base de $\text{Im}(u^2)$.

5b Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

Soit $\vec{w} = (x, y, z) \in \ker(u^2) \cap \text{Im}(u^2)$. Alors $\vec{w} = (x, y, z) \in \text{Im}(u^2)$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = (\alpha, \alpha, -\alpha)$. Et $\vec{w} \in \ker(u^2)$ donc $\alpha - \alpha - 2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$ donc $\vec{w} = \vec{0}$ donc $\ker(u^2) \cap \text{Im}(u^2) = \{\vec{0}\}$ donc le théorème du rang permet de conclure $\mathbb{R}^3 = \ker(u^2) \oplus \text{Im}(u^2)$.

Partie 3 : Cas général : Dans cette partie, E est un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

On appelle coeur de l'endomorphisme u , noté C , la partie de E définie par : pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\vec{x} \in C \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \text{Im}(u^k)$$

On appelle nilspace de l'endomorphisme u , noté N , la partie de E définie par : pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\vec{x} \in N \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \vec{x} \in \ker(u^k)$$

Enfin, on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $\forall \vec{x} \in F, u(\vec{x}) \in F$.

6 Soient n, k deux entiers naturels. Montrer que $\ker(u^k)$ et $\text{Im}(u^k)$ sont stables par u^n .

Soit $\vec{x} \in \ker(u^k)$. Alors $u^k(u^n(\vec{x})) = u^{k+n}(\vec{x}) = u^n(u^k(\vec{x})) = u^n(\vec{0}) = \vec{0}$ donc $u^n(\vec{x}) \in \ker(u^k)$ donc $\ker(u^k)$ est stable par u^n .

Soit $\vec{y} \in \text{Im}(u^k)$. Alors $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u^k(\vec{x})$. Donc $u^n(\vec{y}) = u^n(u^k(\vec{x})) = u^{n+k}(\vec{x}) = u^k(u^n(\vec{x})) \in \text{Im}(u^k)$ donc $\text{Im}(u^k)$ est stable par u^n .

7 On rappelle que d'après la partie 1, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ et $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$.

7a Montrer que C et N sont des sous-espaces vectoriels de E .

- $C \subset E$
- $\vec{0} \in C$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\vec{0} \in \text{Im}(u^k)$ (car $\text{Im}(u^k)$ est un sev de E).
- Soient $\vec{y}, \vec{y}' \in C$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\vec{y}, \vec{y}' \in \text{Im}(u^k)$ donc $\lambda\vec{y} + \mu\vec{y}' \in \text{Im}(u^k)$ (c'est un sev de E).
Donc $\lambda\vec{y} + \mu\vec{y}' \in C$.
- Donc C est un sous-espace vectoriel de E .
- $N \subset E$
- $\vec{0} \in N$ car $\vec{0} \in \ker(u)$.
- Soient $\vec{x}, \vec{x}' \in N$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $\vec{x} \in \ker(u^k)$ et $\vec{x}' \in \ker(u^{k'})$.
Notons $K = \max(k, k')$. On a alors $\vec{x}, \vec{x}' \in \ker(u^K)$ donc $\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}' \in \ker(u^K)$. Donc $\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}' \in N$.
- Donc N est un sous-espace vectoriel de E .

7b Montrer que C et N sont stables par u .

- Soit $\vec{y} \in C$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\vec{y} \in \text{Im}(u^k)$ donc $u(\vec{y}) \in \text{Im}(u^k)$ car $\text{Im}(u^k)$ est stable par u .
Donc $u(\vec{y}) \in C$. Donc C est stable par u .
- Soit $\vec{x} \in N$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\vec{x} \in \ker(u^k)$. Donc $u(\vec{x}) \in \ker(u^k)$ car $\ker(u^k)$ est stable par u .
Donc $u(\vec{x}) \in N$. Donc N est stable par u .

7c Montrer que u surjectif $\Leftrightarrow C = E$.

($\Rightarrow$) Supposons u surjectif. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, (même $k = 0$, cas particulier), u^k est surjectif comme composée de surjections. Donc $\text{Im}(u^k) = E$ donc $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} \in C$.

Donc $C = E$.

($\Leftarrow$) Supposons $C = E$. Alors $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} \in \text{Im}(u)$ (prendre $k = 1$). Donc u est surjectif.

7d Montrer que u injectif $\Leftrightarrow N = \{\vec{0}\}$.

($\Rightarrow$) Supposons u injectif. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, (même $k = 0$, cas particulier), u^k est injectif comme composée d'injections. Donc $\ker(u^k) = \{\vec{0}\}$. donc si $\vec{x} \in N$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\vec{x} \in \ker(u^k)$ donc $\vec{x} = \vec{0}$.

Donc $N = \{\vec{0}\}$.

($\Leftarrow$) Supposons $N = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{x} \in \ker(u)$. Alors $\vec{x} \in N$ donc $\vec{x} = \vec{0}$. Donc $\ker(u) = \{\vec{0}\}$ donc u est injectif.

8 On suppose dans les questions 8a et 8b qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^{k+1})$.

8a Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\text{Im}(u^{k+n}) = \text{Im}(u^k)$.

Montrons ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- I. : pour $n = 0$ c'est trivial (et pour $n = 1$ c'est l'hypothèse sur k).
- H. : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im}(u^{k+n}) = \text{Im}(u^k)$.
On a déjà $\text{Im}(u^{k+n+1}) \subset \text{Im}(u^{k+n})$.
Réciproquement, soit $\vec{y} \in \text{Im}(u^{k+n})$.
Alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u^{k+n}(\vec{x}) = u^n(u^k(\vec{x}))$.
On a $u^k(\vec{x}) \in \text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^{k+1})$ donc il existe $\vec{x}' \in E$ tel que $u^k(\vec{x}) = u^{k+1}(\vec{x}')$.
Alors $\vec{y} = u^n(u^{k+1}(\vec{x}')) = u^{k+n+1}(\vec{x}') \in \text{Im}(u^{k+n+1})$.
Donc $\text{Im}(u^{k+n}) \subset \text{Im}(u^{k+n+1})$ donc $\text{Im}(u^{k+n+1}) = \text{Im}(u^{k+n}) = \text{Im}(u^k)$.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(u^{k+n}) = \text{Im}(u^k)$.

8b On note r le plus petit entier k non nul tel que $\text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^{k+1})$. Montrer que :

8bi : $C = \text{Im}(u^r)$.

- ($\subset$) Soit $\vec{y} \in C$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\vec{y} \in \text{Im}(u^k)$ donc $\vec{y} \in \text{Im}(u^r)$. Donc $C \subset \text{Im}(u^r)$.
- ($\supset$) Soit $\vec{y} \in \text{Im}(u^r)$.
D'après 8a, on a $\forall k \geq r$, $\text{Im}(u^r) = \text{Im}(u^k)$ donc $\vec{y} \in \text{Im}(u^k)$.
D'autre part, d'après la 1b, $\text{Im}(u^r) \subset \text{Im}(u^{r-1}) \subset \dots \subset \text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^0)$.
Donc $\forall k \leq r$, $\vec{y} \in \text{Im}(u^k)$.
Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\vec{y} \in \text{Im}(u^k)$ donc $\vec{y} \in C$.
- Donc $C = \text{Im}(u^r)$.

8bii $u(C) = C$

D'après 7b, $u(C) \subset C$.

Réciproquement, soit $\vec{y} \in C$.

Alors $\vec{y} \in \text{Im}(u^r)$ donc $u(\vec{y}) \in u(\text{Im}(u^r)) = \text{Im}(u^{r+1}) = \text{Im}(u^r) = C$. Donc $C \subset u(C)$.

Donc $u(C) = C$.

8biii $E = \ker(u^r) + \text{Im}(u^r)$ (utiliser la partie 1).

D'après 8a, $\text{Im}(u^r) = \text{Im}(u^{2r})$ donc d'après 3a, $E = \ker(u^r) + \text{Im}(u^r)$.

9 On suppose dans les questions 9a et 9b qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$.

9a Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ker(u^{k+n}) = \ker(u^k)$.

Montrons ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- I. : évident pour $n = 0$.
- H. : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^{k+n}) = \ker(u^k)$.
On a déjà $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+n+1})$.
Réciproquement, soit $\vec{x} \in \ker(u^{k+n+1})$. Alors $u^{k+n+1}(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $u^{k+n}(u(\vec{x})) = \vec{0}$ donc $u(\vec{x}) \in \ker(u^{k+n}) = \ker(u^k)$. Donc $u^k(u(\vec{x})) = \vec{0}$ donc $\vec{x} \in \ker(u^{k+1}) = \ker(u^k)$. Donc $\ker(u^{k+n+1}) \subset \ker(u^k)$.
Ainsi, $\ker(u^{k+n+1}) = \ker(u^k)$.
- Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ker(u^{k+n}) = \ker(u^k)$.

9b On note s le plus petit entier k non nul tel que $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$. Montrer que :

9bi $N = \ker(u^s)$.

$\ker(u^s) \subset N$ est évident par la définition de N .

Réciproquement, soit $\vec{x} \in N$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\vec{x} \in \ker(u^k)$.

Si $k \geq s$, alors d'après 9a, $\ker(u^k) = \ker(u^s)$ donc $\vec{x} \in \ker(u^s)$.

Si $k \leq s$, alors d'après 1a, $\ker(u^k) \subset \ker(u^s)$ donc $\vec{x} \in \ker(u^s)$.

Dans tous les cas, $\vec{x} \in \ker(u^s)$. Donc $N \subset \ker(u^s)$ donc $N = \ker(u^s)$.

9bii $\ker(u^s) \cap \text{Im}(u^s) = \{\vec{0}\}$ (utiliser la partie 1).

D'après 9a, on a $\ker(u^s) = \ker(u^{2s})$. Donc d'après 3b, $\ker(u^s) \cap \text{Im}(u^s) = \{\vec{0}\}$.