

Concours blanc PCSI1 2025

Exercice 1 : Fonction Beta d'Euler. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on pose :

$$\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

1a Justifier soigneusement que cette intégrale est bien définie.

1b A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $\beta(a, b) = \beta(b, a)$.

1c Etablir que $\beta(a, b) = \beta(a+1, b) + \beta(a, b+1)$.

1d A l'aide du changement de variables $t = \cos^2(\theta)$, montrer que :

$$\beta(3/2, 3/2) = \frac{\pi}{8}.$$

1e Calculer $\beta(1, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2a Montrer que :

$$\beta(a+1, b) = \frac{a}{b} \beta(a, b+1)$$

et en déduire que :

$$\beta(a+1, b) = \frac{a}{a+b} \beta(a, b)$$

2b Calculer $\beta(n, p)$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ en exprimant le résultat à l'aide de factorielles.

2c Exprimer $\beta\left(n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right)$ en fonction uniquement de $\beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right)$, de nombres factoriels et de puissances.

2d Montrer **sans rédiger de récurrence** que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\beta\left(n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2p)!(2n)!}{2^{2(n+p)}(n+p)!n!p!} \pi$$

3 On suppose dans cette question que $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

3a On considère une fonction $h : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ où x, y sont deux réels tels que $x < y$.

On suppose que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et on note M_1 le maximum de $|h'(t)|$ sur $[x, y]$. Justifier que M_1 est bien défini et que :

$$\int_x^y h(t) dt = (y-x)h(x) + \int_x^y h'(t)(y-t) dt$$

En déduire que :

$$\left| \int_x^y h(t) dt - (y-x)h(x) \right| \leq M_1 \frac{(y-x)^2}{2}$$

3b Montrer soigneusement que la fonction $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

3c En déduire que la fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

3d En lui appliquant le résultat précédent sur chacun de segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = \frac{k}{n}$ avec $k \in [0, n-1]$, montrer que :

$$|\beta(a, b) - u_n| \leq \frac{a+b-2}{2n} \text{ où } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

Exercice 2 : Soit a un réel strictement positif. On considère la suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_1 = a$

et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

L'objet de cet exercice est d'étudier **en fonction de la valeur de a** la convergence de la suite $\mathbf{u}$. Selon les valeurs de a , la suite définie est donc différente, ce qui expliquera qu'on puisse dans ce problème dire tantôt que la suite $\mathbf{u}$ est convergente, et tantôt dire qu'elle est divergente (pour une autre valeur de a).

1 Dans cette question, on suppose que $a = 2$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n} + 1$. Conclure. Dans la suite, a est de nouveau un réel strictement positif quelconque.

2 Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.

3 On suppose dans cette question que la suite $\mathbf{u}$ converge vers une limite finie l . Montrer que $l = 0$.

4 On suppose dans cette question que la suite $\mathbf{u}$ vérifie la propriété suivante: $\forall n \geq 1, u_n \geq \sqrt{n}$. Montrer que $\mathbf{u}$ est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

5 On suppose, **dans cette question et dans cette question seulement**, qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k < \sqrt{k}$.

5a Montrer que $\forall n \geq k, u_n < \sqrt{k}$.

5b Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq k}$ est décroissante.

5c Conclure.

6 Montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n = \frac{a^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-4}} \cdot 3^{2^{n-5}} \cdot 4^{2^{n-6}} \cdot \dots \cdot (n-1)^{2^{n-1}}} = \frac{a^{2^{n-1}}}{\prod_{k=2}^{n-1} k^{2^{n-2-k}}}.$

On pose de plus $w_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(k)}{2^k}.$

7 Montrer que la suite (w_n) est croissante.

8 Montrer en utilisant les questions 3 et 5 que la suite $\mathbf{u}$ est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$. — —

9 Montrer que (u_n) est divergente si et seulement si (w_n) est majorée par $2 \ln(a)$.

10 En déduire que la suite (w_n) converge. Soit $W = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $a < e^{\frac{W}{2}}$.

Problème 1 : Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E .

On rappelle qu'on pose $u^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N} : u^{k+1} = u^k \circ u$.

Etant donné une partie X de E . On désigne par $Vect(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de X .

On dit que l'endomorphisme u est **cyclique** s'il existe un vecteur $\vec{x}_0 \in E$ tel que :

$$E = Vect(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N}) = Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), u^2(\vec{x}_0), \dots)$$

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout polynôme $Q(X) = q_0 + q_1X + \dots + q_mX^m \in \mathbb{R}[X]$, on pose pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$Q(u) = q_0Id_E + q_1u + \dots + q_mu^m \in \mathcal{L}(E)$$

Partie 1 : Exemples

1 : Exemple 1 : Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$u(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z)$$

1a Montrer que u est un endomorphisme de E .

1b Calculer $u(1, 0, 0)$ et $u^2(1, 0, 0)$ et en déduire que u est un endomorphisme cyclique.

2 : Exemple 2 : Dans cete question, on prend $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme u de E dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2a Montrer que u est un automorphisme de E (c'est-à dire bijectif).

2b Montrer que $u^2 = \alpha u + \beta Id_E$ pour des réels α et β à déterminer.

2c En déduire que u n'est pas cyclique. Indication : on pourra montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $Vect(u^k(\vec{x}) / k \in \mathbb{N}) = Vect(\vec{x}, u(\vec{x}))$.

3 : Exemple 3 : Dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme u de E défini par $u(P) = P'$.

3a Soit P_0 un polynôme de degré $d \geq 0$. Montrer que $Vect(u^k(P_0) / k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_d[X]$.

3b u est-il cyclique ?

4 : Exemple 4 : Dans cette question $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on considère l'endomorphisme u de E défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$.

4a Soit $P \in E$. Calculer $\deg(u(P))$ en fonction de $\deg(P)$.

4bi Déterminer le noyau de u .

4bii Montrer que $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

4biii En déduire $\text{Im}(u)$.

4c L'endomorphisme u est-il cyclique ?

5 Exemple 5 : Dans cette question, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$, c'est-à-dire que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

5a Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}_0$ de E tel que la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{p-1}(\vec{x}_0))$ est libre. Que peut-on en déduire sur p ?

5b En déduire que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

Partie 2 : Etude générale. Dans cette partie, u est un endomorphisme cyclique de E et $\dim(E) = n \geq 1$. On fixe un vecteur $\vec{x}_0 \in E$ tel que $E = \text{Vect}(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N})$.

6a Montrer que la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^n(\vec{x}_0))$ est liée.

6b Montrer qu'il existe un entier p maximal pour-lequel la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ est libre.

6c Montrer que $u^{p+1}(\vec{x}_0) \in \text{Vect}(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$.

6d Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\vec{x}_0) \in \text{Vect}(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$

6e En déduire que $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ est une base de E et que $p = n - 1$

7a Justifier l'existence de $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$u^n(\vec{x}_0) = p_0\vec{x}_0 + p_1u(\vec{x}_0) + \dots + p_{n-1}u^{n-1}(\vec{x}_0)$$

Dans la suite, on posera $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \dots - p_1X - p_0 \in \mathbb{R}[X]$.

7b Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(u)$ (voir sa définition en début de problème) des vecteurs de la base $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$.

En déduire que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On dit que P est un polynôme annulateur de u .

7c Montrer que $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. Est-ce une base de $\mathcal{L}(E)$?

7d En déduire que :

- Il n'existe aucun polynôme non nul Q de degré strictement inférieur à n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- P est l'unique polynôme unitaire de degré n tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Le polynôme P est appelé le polynôme minimal de u .

7e Application : déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme u de la question 1.

Partie 3 : étude du commutant. Dans cette partie, u désigne toujours un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E , avec E de dimension $n \geq 1$.

On fixe $\vec{x}_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N})$.

On rappelle qu'alors, la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ est une base de E .

8 Montrer que le commutant $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

9 Notons $\mathbb{R}[u] = \{Q(u) / Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.

10a Soient deux endomorphismes v et w de $C(u)$. Montrer que, si $v(\vec{x}_0) = w(\vec{x}_0)$, alors $v = w$.

10b Soit $v \in C(u)$.

10bi Justifier l'existence de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $v(\vec{x}_0) = a_{n-1}u^{n-1}(\vec{x}_0) + \dots + a_1u(\vec{x}_0) + a_0\vec{x}_0$.

10bii Montrer que $v = a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0Id_E$.

11 Décrire $C(u)$.

12 Déterminer la dimension de $C(u)$.

Exercice 1 : Fonction Beta d'Euler. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on pose :

$$\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

1a Justifier soigneusement que cette intégrale est bien définie.

Si $a > 1$, pour $t > 0$, $t \mapsto t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$ a pour limite 0 quand t tend vers 0^+ . On la prolonge par continuité en 0 en posant $0^a = 0$.

De même, si $b > 1$, on prolonge $t \mapsto t^{b-1} = e^{(b-1)\ln(t)}$ par continuité en 1 en prenant 0 comme valeur.

Dans les cas $a = 1$ et $b = 1$, ces fonctions sont polynomiales donc continues (sur $\mathbb{R}$ dans ces cas !).

Ainsi, la fonction $t \mapsto t^{a-1} (1-t)^{b-1}$ est continue sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions continues donc cette intégrale est bien définie.

1b A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $\beta(a, b) = \beta(b, a)$.

On pose $u = 1 - t$ d'où $du = -dt$ et :

$$\begin{aligned} \beta(a, b) &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \int_1^0 (1-u)^{a-1} u^{b-1} (-du) \\ &= \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{a-1} du = \beta(b, a). \end{aligned}$$

1c Etablir que $\beta(a, b) = \beta(a+1, b) + \beta(a, b+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} \beta(a+1, b) + \beta(a, b+1) &= \int_0^1 \left(t^a (1-t)^{b-1} + t^{a-1} (1-t)^b \right) dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} (t + 1-t) dt \\ &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \beta(a, b). \end{aligned}$$

1d A l'aide du changement de variables $t = \cos^2(\theta)$, montrer que :

$$\beta(3/2, 3/2) = \frac{\pi}{8}.$$

On a $\beta(3/2, 3/2) = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt$ et on pose $t = \cos^2(\theta)$ d'où $dt = -2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$ et :

$$\begin{aligned} \beta(3/2, 3/2) &= \int_{\pi/2}^0 \sqrt{\cos^2(\theta) (1 - \cos^2(\theta))} (-2) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta) \cos(\theta))^2 d\theta \quad (\sin \text{ et } \cos \text{ sont positives sur } [0, \frac{\pi}{2}]) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4} \sin(2\pi) + \frac{1}{4} \sin(0) \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

1e Calculer $\beta(1, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\beta(1, n) = \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \left[-\frac{(1-t)^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n}$$

2a A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\beta(a+1, b) = \frac{a}{b} \beta(a, b+1)$$

et en déduire que :

$$\beta(a+1, b) = \frac{a}{a+b} \beta(a, b)$$

On a en posant $\begin{cases} u(t) = t^a \\ v(t) = -\frac{(1-t)^b}{b} \end{cases}$, $\begin{cases} u'(t) = at^{a-1} \\ v'(t) = (1-t)^{b-1} \end{cases}$ donc par IPP :

$$\begin{aligned} \beta(a+1, b) &= \int_0^1 t^a (1-t)^{b-1} dt = \left[-t^a \frac{(1-t)^b}{b} \right]_0^1 + \int_0^1 at^{a-1} \frac{(1-t)^b}{b} dt \\ &= \frac{a}{b} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^b dt = \frac{a}{b} \beta(a, b+1) \end{aligned}$$

Or d'après 1c, $\beta(a, b) = \beta(a+1, b) + \beta(a, b+1)$ donc :

$$\begin{aligned} \beta(a+1, b) &= \beta(a, b) - \beta(a, b+1) \\ &= \beta(a, b) - \beta(b+1, a) \\ &= \beta(a, b) - \frac{b}{a} \beta(b, a+1) \\ &= \beta(a, b) - \frac{b}{a} \beta(a+1, b) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \left(1 + \frac{b}{a}\right) \beta(a+1, b) = \beta(a, b) \text{ donc } \beta(a+1, b) = \frac{a}{a+b} \beta(a, b).$$

2b Calculer $\beta(n, p)$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ en exprimant le résultat à l'aide de factorielles.

On a donc :

$$\begin{aligned} \beta(n, p) &= \frac{n-1}{n-1+p} \beta(n-1, p) \\ &= \frac{n-1}{n+p-1} \frac{n-2}{n+p-2} \frac{n-3}{n+p-3} \cdots \frac{1}{p+1} \beta(1, p) \\ &= \frac{(n-1)!p!}{(n+p-1)!} \beta(1, p) = \frac{(n-1)!p!}{(n+p-1)!} \frac{1}{p} \\ &= \frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!} \end{aligned}$$

2c et 2d Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\beta\left(n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right)_7 = \frac{(2p)!(2n)!}{2^{2(n+p)}(n+p)!n!p!} \pi$$

D'après 2a, on a :

$$\begin{aligned}
\beta\left(n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) &= \frac{n - \frac{1}{2}}{n + p} \beta\left(n - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{n - \frac{1}{2}}{n + p} \frac{n - \frac{3}{2}}{n + p - 1} \frac{n - \frac{5}{2}}{n + p - 2} \cdots \frac{\frac{3}{2}}{p + 2} \beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-1)}{n+p} \frac{(2n-3)}{n+p-1} \frac{(2n-5)}{n+p-2} \cdots \frac{3}{p+2} \beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \frac{(p+1)!}{(n+p)!} \beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \frac{(p+1)!}{(n+p)!} \beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Rappelons $\beta(3/2, 3/2) = \frac{\pi}{8}$. On a donc toujours avec 1b et 2a :

$$\begin{aligned}
\beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right) &= \beta\left(p + \frac{1}{2}, 3/2\right) = \frac{p - \frac{1}{2}}{p + 1} \beta\left(p - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{p - \frac{1}{2}}{p + 1} \frac{p - \frac{3}{2}}{p} \cdots \frac{\frac{3}{2}}{3} \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{p-1}} \frac{2p-1}{p+1} \frac{2p-3}{p} \cdots \frac{3}{3} \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{p-1}} \frac{(2p-1)!}{(2p-2)(2p-4)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2} \frac{2}{(p+1)!} \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{p-1}} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{(2p-1)!}{(p-1)!} \frac{\pi}{(p+1)!} \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^p} \frac{(2p-1)!}{(p-1)!} \frac{\pi}{(p+1)!}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\beta\left(n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \frac{(p+1)!}{(n+p)!} \beta\left(3/2, p + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \frac{(p+1)!}{(n+p)!} \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^p} \frac{(2p-1)!}{(p-1)!} \frac{\pi}{(p+1)!} \\
&= \frac{4}{2^{2n}} \frac{1}{2^{2p}} \frac{2n(2n-1)!}{2n(n-1)!} \frac{(p+1)!}{(n+p)!} \frac{(2p-1)!}{(p-1)!} \frac{\pi}{(p+1)!} \\
&= \frac{2}{2^{2n}} \frac{1}{2^{2p}} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(n+p)!} \frac{2p(2p-1)!}{2p(p-1)!} \pi \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2^{2p}} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(n+p)!} \frac{(2p)!}{p!} \pi = \frac{(2p)! (2n)!}{2^{2(n+p)} (n+p)! n! p!} \pi
\end{aligned}$$

3 On suppose dans cette question que $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

3a On considère une fonction $h : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ où x, y sont deux réels tels que $x < y$.

On suppose que h est de classe C^1 sur $[x, y]$ et on note M_1 le maximum de $|h'(t)|$ sur $[x, y]$.

Justifier que M_1 est bien défini et que :

$$\int_x^y h(t) dt = (y-x)h(x) + \int_x^y h'(t)(y-t) dt$$

h' est continue sur le segment $[x, y]$ donc le théorème des bornes atteintes justifie l'existence de M_1 .

En intégrant par parties avec $\begin{cases} u(t) = h(t) \\ v(t) = t - y \end{cases}$, $\begin{cases} u'(t) = h'(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_x^y h(t) dt &= [(t-y)h(t)]_x^y - \int_x^y h'(t)(t-y) dt \\ &= (y-x)h(x) + \int_x^y h'(t)(y-t) dt \end{aligned}$$

En déduire que :

$$\left| \int_x^y h(t) dt - (y-x)h(x) \right| \leq M_1 \frac{(y-x)^2}{2}$$

On a donc par inégalité triangulaire sur les intégrales :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y h(t) dt - (y-x)h(x) \right| &= \left| \int_x^y h'(t)(y-t) dt \right| \leq \int_x^y |h'(t)(y-t)| dt \\ &\leq \int_x^y M_1 |(y-t)| dt \text{ car } x < y \\ &\leq M_1 \int_x^y (y-t) dt \text{ car } x < y \text{ donc } y-t \geq 0 \\ &\leq M_1 \left[-\frac{(y-t)^2}{2} \right]_x^y = M_1 \frac{(y-x)^2}{2} \end{aligned}$$

3b Montrer soigneusement que la fonction $t \mapsto t^{a-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

Si $a = 2$, c'est évident.

Si $a > 2$, notons $g(t) = t^{a-1}$. g est de classe C^1 sur $]0, 1]$ et $\forall t \in]0, 1]$, $g'(t) = (a-1)t^{a-2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} g'(t) = 0$ car $a > 2$.

De plus, g est continue en 0 (en ayant prolongé par continuité en posant $g(0) = 0$).

Donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, g est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

3c En déduire que la fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

Puisque $b \geq 2$, par composition avec $t \mapsto 1-t$, on déduit de 3b que $t \mapsto (1-t)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

Donc $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions de classe C^1 .

3d En lui appliquant le résultat précédent sur chacun de segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = \frac{k}{n}$ avec $k \in [0, n-1]$, montrer que :

$$|\beta(a, b) - u_n| \leq \frac{a+b-2}{2n} \text{ où } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

Comme $a - 1 \geq 1$ et $b - 1 \geq 1$, les fonctions $t \mapsto t^{a-1}$ et $t \mapsto (1-t)^{b-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc $t \mapsto t^{a-1} (1-t)^{b-1}$ aussi par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

En lui appliquant le résultat précédent sur chacun de segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = \frac{k}{n}$ avec $k \in [0, n-1]$, montrer que :

$$|\beta(a, b) - u_n| \leq \frac{a+b-2}{2n} \text{ où } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

Notons $h(t) = t^{a-1} (1-t)^{b-1}$, on a donc pour tout $k \in [0, n-1]$,

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M_1(k)}{2n^2}$$

où $M_1(k) = \max_{t \in [k/n, (k+1)/n]} |h'(t)|$.

Or $h'(t) = (a-1)t^{a-2}(1-t)^{b-1} + (b-1)t^{a-1}(1-t)^{b-2}$ donc tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |h'(t)| &\leq \left| (a-1)t^{a-2}(1-t)^{b-1} \right| + \left| (b-1)t^{a-1}(1-t)^{b-2} \right| \\ &\leq (a-1) + (b-1) = a+b-2 \end{aligned}$$

car $t, 1-t, t^{a-2}, (1-t)^{b-1}, t^{a-1}, (1-t)^{b-2} \in [0, 1]$.

Donc $M_1(k) \leq a+b-2$.

Donc $\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{a+b-2}{2n^2}$.

En appliquant la relation de Chasles, on a alors :

$$\begin{aligned} |\beta(a, b) - u_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt - \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a+b-2}{2n^2} \\ &\leq \frac{a+b-2}{2n} \end{aligned}$$

3c Ecrire un programme Python qui donne une valeur approchée de $\beta(a, b)$ à 10^{-3} près.

Voir M. Jacob.

Corrigé de l'exercice 2 :

Soit a un réel strictement positif. On considère la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_1 = a$ et pour tout

$$n \geq 1, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

L'objet de cet exercice est d'étudier en fonction de la valeur de a la convergence de la suite u .

- 1** Dans cette question, on suppose que $a = 2$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n} + 1$. Conclure.

Par récurrence sur $n \geq 1$:

Initialisation : $u_1 = 2$ et $\sqrt{1} + 1 = 2$.

Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons $u_n \geq \sqrt{n} + 1$. Montrons $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1} + 1$

On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \geq \frac{(\sqrt{n} + 1)^2}{\sqrt{n}} = \frac{n + 2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}} = \frac{n + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} + 2$$

donc $u_{n+1} - (\sqrt{n+1} + 1) \geq \sqrt{n} + 1 - \sqrt{n+1} \geq 0$ car $\sqrt{n} + 1 \geq \sqrt{n+1} \Leftrightarrow n + 1 + 2\sqrt{n} \geq n + 1$, qui est vrai d'où la conclusion.

Dans la suite, a est de nouveau un réel strictement positif quelconque.

- 2** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.

Récurrence: $u_1 > 0$. supposons $u_n > 0$ alors $u_n^2 > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

- 3** On suppose dans cette question que la suite u converge vers une limite finie l . Montrer que $l = 0$.

On suppose (u_n) converge vers l alors (u_{n+1}) , suite extraite de (u_n) converge aussi vers l . De plus, (u_n^2) converge vers l^2 donc $\left(\frac{u_n^2}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0. Or $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}$ donc par unicité de la limite, $l = 0$.

- 4** On suppose dans cette question que la suite u vérifie la propriété suivante: $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$. Montrer que u est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

Soit $n \geq 1$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} - u_n = \frac{u_n^2 - \sqrt{n}u_n}{\sqrt{n}} = \frac{(u_n - \sqrt{n})u_n}{\sqrt{n}} \geq 0$$

car $u_n \geq \sqrt{n}$ donc (u_n) est une suite croissante. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 5** On suppose, dans cette question et dans cette question seulement, qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k < \sqrt{k}$.

- 5a** Montrer que $\forall n \geq k$, $u_n < \sqrt{k}$.

Récurrence sur $n \geq k$:

Initialisation, $n = k$: $u_k < \sqrt{k}$.

Hérédité : soit $n \geq k$ fixé. Supposons que $u_n < \sqrt{k}$, montrons $u_{n+1} < \sqrt{k}$.

On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} < \frac{k}{\sqrt{n}} \leq \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$$

d'où la conclusion.

- 5b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq k}$ est décroissante.

Soit $n \geq k$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} - u_n = \frac{u_n^2 - \sqrt{n}u_n}{\sqrt{n}} = \frac{(u_n - \sqrt{n})u_n}{\sqrt{n}} \leq 0$$

car $u_n \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ donc $(u_n)_{n \geq k}$ est une suite décroissante

5c Conclure.

La suite $(u_n)_{n \geq k}$ est une suite décroissante et minorée par 0 donc converge vers $l \geq 0$ donc vers $l = 0$ d'après 3.)

6 Montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n = \frac{a^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-4}} \cdot 3^{2^{n-5}} \cdot 4^{2^{n-6}} \dots (n-1)^{2^{-1}}} = \frac{a^{2^{n-1}}}{\prod_{k=2}^{n-1} k^{2^{n-2-k}}}$.

Récurrence sur $n \geq 3$:

Initialisation : $u_2 = \frac{a^2}{\sqrt{1}}$; $u_3 = \frac{u_2^2}{\sqrt{2}} = \frac{a^4}{\sqrt{2}} = \frac{a^{2^2}}{2^{2^{-1}}}$; $u_4 = \frac{u_3^2}{\sqrt{3}} = \frac{a^8}{2\sqrt{3}} = \frac{a^{2^3}}{2^{2^0} \times 3^{2^{-1}}}$ de même

$u_5 = \frac{a^{16}}{2^2 \times 3 \times \sqrt{4}} = \frac{a^{2^4}}{2^{2^1} \times 3^{2^0} \times 4^{2^{-1}}}$. La propriété est donc vraie pour $n = 3, 4, 5$. ($n = 3$ suffit).

Hérédité : soit $n \geq 3$. Supposons que $u_n = \frac{a^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-4}} \cdot 3^{2^{n-5}} \cdot 4^{2^{n-6}} \dots (n-1)^{2^{-1}}}$, montrons :

$$u_{n+1} = \frac{a^{2^n}}{2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{2^{n-5}} \dots (n-1)^{2^0} n^{2^{-1}}}$$

On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} = \left(\frac{a^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-4}} \cdot 3^{2^{n-5}} \cdot 4^{2^{n-6}} \dots (n-1)^{2^{-1}}} \right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or pour tout réel x , $(x^{2^i})^2 = x^{2 \times 2^i} = x^{2^{i+1}}$ donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{a^{2^n}}{2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{2^{n-5}} \dots (n-1)^{2^0} \times \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{a^{2^n}}{2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{2^{n-5}} \dots (n-1)^{2^0} n^{2^{-1}}} \end{aligned}$$

On pose de plus $w_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

7 Montrer que la suite (w_n) est croissante.

On a : $w_{n+1} = \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{2^k} = w_n + \frac{\ln(n)}{2^n}$ or $\ln(n) \geq 0$ donc $w_{n+1} \geq w_n$ donc la suite (w_n) est croissante.

Justifiez que l'on pose $W = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ avec éventuellement $W = +\infty$.

La suite (w_n) étant croissante, elle admet d'après le théorème de la limite monotone une limite finie ou $+\infty$, donc on peut poser $W = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ avec éventuellement $W = +\infty$.

8 Montrer en utilisant les questions 3 et 5 que la suite u est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

Supposons que la suite (u_n) converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. il existe un entier $k > 2$ à partir duquel $u_n < 1$ et en particulier $u_k < 1$. Réciproquement, supposons qu'il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$, alors $u_k < \sqrt{k}$ et donc d'après la question 5, la suite (u_n) est convergente.

- 9 Montrer que (u_n) est divergente si et seulement si (w_n) est majorée par $2 \ln(a)$.
On a :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{a^{2^{n-1}}}{\prod_{k=2}^{n-1} k^{2^{n-2-k}}}\right) = \ln(a^{2^{n-1}}) - \ln\left(\prod_{k=2}^{n-1} k^{2^{n-2-k}}\right) \\ &= 2^{n-1} \ln(a) - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k^{2^{n-2-k}}) = 2^{n-1} \ln(a) - \sum_{k=2}^{n-1} 2^{n-2-k} \ln(k) \\ &= 2^{n-2} \left(2 \ln(a) - \sum_{k=2}^{n-1} 2^{-k} \ln(k)\right) = 2^{n-2} (2 \ln(a) - w_n) \end{aligned}$$

La suite (u_n) est divergente si et seulement si pour tout entier n , $u_n \geq 1$ c'est-à-dire $\ln(u_n) \geq 0$ soit $2 \ln(a) - w_n \geq 0$ c'est-à-dire $w_n \leq 2 \ln(a)$ donc (u_n) est divergente si et seulement si (w_n) est majorée par $2 \ln(a)$.

- 10 En déduire que la suite (w_n) converge. Soit $W = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $a < e^{\frac{W}{2}}$.

On a vu dans la question 1 que pour $a = 2$, la suite (u_n) est divergente donc la suite (w_n) est majorée par $2 \ln(2)$ et est croissante, (w_n) converge donc. La suite (u_n) converge si et seulement si il existe n tel que $w_n > 2 \ln(a)$ ce qui revient à $W > 2 \ln(a)$ car la suite (w_n) est croissante. D'où (u_n) converge si et seulement si $a < e^{\frac{W}{2}}$.

Corrigé du problème 1 : Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E .

On rappelle qu'on pose $u^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $u^{k+1} = u^k \circ u$.

On dit que l'endomorphisme u est cyclique s'il existe un vecteur $\vec{x}_0 \in E$ tel que :

$$E = Vect(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N}) = Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), u^2(\vec{x}_0), \dots)$$

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

Partie 1 : Exemples

- 1 : **Exemple 1 :** Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$u(x, y, z) = (6z, x - 11z, y + 6z)$$

- 1a Montrer que u est un endomorphisme de E .

On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z \\ x - 11z \\ y + 6z \end{pmatrix}$ donc u est linéaire car c'est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Donc u est un endomorphisme de E .

1b Calculer $u(1, 0, 0)$ et $u^2(1, 0, 0)$ et en déduire que u est un endomorphisme cyclique.

On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ et $u^2(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$ donc pour $\vec{x}_0 = (1, 0, 0)$, on a :

$$(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) \in Vect(u^k(1, 0, 0) / k \in \mathbb{N})$$

Or on reconnaît la base canonique donc c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc $E = Vect(u^k(1, 0, 0) / k \in \mathbb{N})$.

Ainsi, u est un endomorphisme cyclique.

2 : Exemple 2 : On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée

$$\text{est } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2a Montrer que u est un automorphisme de E (c'est-à-dire bijectif).

On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4 + 6) = 4 \neq 0$$

donc A est inversible, u est bijective et est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2b Montrer que $u^2 = \alpha u + \beta Id_E$ pour des réels α et β à déterminer.

$$\text{On a : } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -18 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 3A - 2I_3. \text{ Donc } u^2 = 3u - 2Id_E.$$

2c En déduire que u n'est pas cyclique. Indication : on pourra montrer que pour tout $\vec{x} \in E$, $Vect(u^k(\vec{x}) / k \in \mathbb{N}) = Vect(\vec{x}, u(\vec{x}))$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, on a $u^2(\vec{x}) = 3u(\vec{x}) - 2\vec{x} \in Vect(\vec{x}, u(\vec{x}))$

On peut ensuite montrer par récurrence sur $k \geq 2$ que $u^k(\vec{x}) \in Vect(\vec{x}, u(\vec{x}))$. (à détailler !).

Puis donc que $Vect(u^k(\vec{x}) / k \in \mathbb{N}) = Vect(\vec{x}, u(\vec{x}))$.

Or ceci est de dimension au plus 2 donc ne peut-être $E = \mathbb{R}^3$.

Donc u n'est pas cyclique.

3 : Exemple 3 : Dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme u de E défini par $u(P) = P'$.

3a Soit P_0 un polynôme de degré $d \geq 0$. Montrer que $Vect(u^k(P_0) / k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_d[X]$.

On a $u^k(P_0) = P^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq d$ et $u^k(P_0) = 0$ pour $k > d$.

Ainsi $Vect(u^k(P_0) / k \in \mathbb{N}) = Vect(u^k(P_0) / k \in [0, d])$. Or les polynômes $P_0, u(P_0), \dots, u^d(P_0)$ sont de degrés respectivement $d, d-1, \dots, 0$ donc forment une famille de polynômes de degrés échelonnés de d à 0 donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Donc $Vect(u^k(P_0) / k \in [0, d]) = \mathbb{R}_d[X]$.

Donc $Vect(u^k(P_0) / k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_d[X]$.

3b u est-il cyclique ?

Prenons alors P_0 de degré n , par exemple $P_0 = X^n$. D'après 3a, on a $Vect(u^k(P_0) / k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_n[X] = E$ donc u est cyclique.

4 : Exemple 4 : On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$.

4a Soit $P \in E$. Calculer $\deg(u(P))$ en fonction de $\deg(P)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ non nul. Posons $d = \deg(P)$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec donc $a_d \neq 0$. On a :

$$u(P) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^d a_k X^k = \sum_{k=0}^d a_k \left((X+1)^k - X^k \right)$$

donc :

- $\deg(u(P)) \leq d$
- le coefficient de X^d dans $u(P)$ est $a_d - a_d = 0$.
- si $d \geq 1$, le coefficient de X^{d-1} dans $u(P)$ est $da_d + a_{d-1} - a_{d-1} = da_d \neq 0$

Donc $\deg(u(P)) = d - 1$.

Ainsi :

$$\deg(u(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

4bi Déterminer le noyau de u .

D'après la question précédente, pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$P \in \ker(u) \Leftrightarrow u(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \deg u(P) = -\infty \Leftrightarrow \deg(P) \leq 0$$

donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

4bii Montrer que $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

D'après 4a, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg(u(P)) \leq \deg(P) - 1 \leq n - 2$ donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], u(P) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

donc $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

4biii En déduire $\text{Im}(u)$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) - \dim(\ker(u)) = n - 1 = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])$.

Or $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

4c L'endomorphisme u est-il cyclique ?

D'après 4a, on a pour tout $k \in [0, n-1]$, $\deg(u^k(X^{n-1})) = n - 1 - k$.

La famille $(X^{n-1}, u(X^{n-1}), \dots, u^{n-1}(X^{n-1}))$ est donc une famille de polynômes de degrés échelonnés de $n-1$ à 0 donc est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus, $u^k(X^{n-1}) = 0_E$ pour $k \geq n$ donc $\text{Vect}(u^k(X^{n-1}) / k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}_{n-1}[X] = E$ donc u est cyclique.

5 Exemple 5 : Dans cette question, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p \geq 2$, c'est-à-dire que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

5a Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}_0$ de E tel que la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{p-1}(\vec{x}_0))$ est libre. Que peut-on en déduire sur p ?

Puisque u^{p-1} n'est pas l'application nulle, il existe $\vec{x}_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.

Remarquons que pour tout entier $k \geq p$, on a $u^k = u^p \circ u^{k-p} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ u^{k-p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 \vec{x}_0 + \lambda_1 u(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

En appliquant u^{p-1} à cette relation il vient $\lambda_0 u^{p-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ donc $\lambda_0 = 0$.

Supposons par récurrence $\lambda_0 = \dots = \lambda_{i-1} = 0$ pour $i \leq p-1$.

La relation se réécrit alors $\lambda_i u^i(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

On applique cette fois u^{p-1-i} pour obtenir $\lambda_i u^{p-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ donc $\lambda_i = 0$.

Pour $i = p-1$ on obtient alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ donc la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{p-1}(\vec{x}_0))$ est libre.

Comme c'est une famille libre de p vecteurs de E et $\dim(E) = n$, on a $p \leq n$.

5b En déduire que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

- ($\Leftarrow$) Supposons $p = n$. Alors la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{p-1}(\vec{x}_0))$ est libre et de cardinal $p = n = \dim(E)$ donc c'est une base de E .

Donc u est cyclique.

- ($\Rightarrow$) Supposons u cyclique. Soit alors $\vec{y} \in E$ tel que $E = \text{Vect}(u^k(\vec{y}) / k \in \mathbb{N}) = \text{Vect}(\vec{y}, u(\vec{y}), \dots, u^{p-1}(\vec{y}))$ car $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour $k \geq p$ donc $u^k(\vec{y}) = \vec{0}$.
Il s'ensuit que $(\vec{y}, u(\vec{y}), \dots, u^{p-1}(\vec{y}))$ est une famille génératrice de E .
Donc $\text{Card}(\vec{y}, u(\vec{y}), \dots, u^{p-1}(\vec{y})) \geq \dim(E)$ donc $p \geq n$. Or $p \leq n$ donc $p = n$.

Partie 2 : Etude générale. Dans cette partie, u est un endomorphisme cyclique de E et $\dim(E) = n \geq 1$. On fixe un vecteur $\vec{x}_0 \in E$ tel que $E = \text{Vect}(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N})$.

6a Montrer que la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^n(\vec{x}_0))$ est liée.

La famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^n(\vec{x}_0))$ est de cardinal $n+1$ dans un espace vectoriel E de dimension n , elle est donc liée.

6b Montrer qu'il existe un entier p maximal pour-lequel la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ est libre.

Tout d'abord, notons que comme $E \neq \{\vec{0}\}$ et que $E = \text{Vect}(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N})$, alors $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$.

Considérons l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} / (\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^k(\vec{x}_0)) \text{ est libre}\}$. C'est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (car $0 \in A$, la famille $\{\vec{x}_0\}$ étant libre), et majorée par n . ($(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^n(\vec{x}_0))$

est liée, et toute surfamille de cette famille est donc liée). On en déduit qu'il existe un entier p , maximal, pour lequel la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ soit libre.

6c Montrer que $u^{p+1}(\vec{x}_0) \in \text{Vect}(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$.

Par définition de p , la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ est libre et $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0), u^{p+1}(\vec{x}_0))$ est liée. Par le cours, on sait alors que $u^{p+1}(\vec{x}_0) \in \text{Vect}(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0), u^{p+1}(\vec{x}_0))$.

6d Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\vec{x}_0) \in \text{Vect}(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$.

- Initialisation. Pour tout $0 \leq k \leq p$, on a bien $u^k(\vec{x}_0) \in \text{Vect}(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ donc la propriété est vraie aux rang $0 \leq k \leq p$. Elle est vraie également au rang $p+1$ par la question précédente.

- Hérédité. Soit $k \geq p$ et supposons la propriété vraie au rang k .
Par hypothèse de récurrence, on a $u^k(\vec{x}_0) \in Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$. Il existe donc $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u^k(\vec{x}_0) = \lambda_0 \vec{x}_0 + \lambda_1 u(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_p u^p(\vec{x}_0)$$

On compose par u :

$$u^{k+1}(\vec{x}_0) = \lambda_0 u(\vec{x}_0) + \lambda_1 u^2(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_p u^{p+1}(\vec{x}_0)$$

Or on a $u(\vec{x}_0), u^2(\vec{x}_0), \dots, u^{p+1}(\vec{x}_0) \in Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ donc $u^{k+1}(\vec{x}_0) \in Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$. Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\vec{x}_0) \in Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$.

6e En déduire que $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ est une base de E et que $p = n-1$.

On a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\vec{x}_0) \in Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$. Ainsi, on a :

$$E = Vect(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N}) = Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$$

La famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^p(\vec{x}_0))$ est donc génératrice de E . Comme c'est une famille libre par définition de p , c'est donc une base de E . Son cardinal est donc égal à la dimension de

E , soit $p+1 = n$.

7a Justifier l'existence de $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$u^n(\vec{x}_0) = p_0 \vec{x}_0 + p_1 u(\vec{x}_0) + \dots + p_{n-1} u^{n-1}(\vec{x}_0)$$

On a montré précédemment que $u^n(\vec{x}_0) \in Vect(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$, donc il existe $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$u^n(\vec{x}_0) = p_0 \vec{x}_0 + p_1 u(\vec{x}_0) + \dots + p_{n-1} u^{n-1}(\vec{x}_0)$$

Dans la suite, on posera $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \dots - p_1X - p_0 \in \mathbb{R}[X]$.

7b Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(u)$ (voir sa définition en début de problème) des vecteurs de la base $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$.

En déduire que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a $P(u) = u^n - p_{n-1}u^{n-1} - \dots - p_1u - p_0Id_E$ d'où en évaluant en $\vec{x}_0$:

$$\begin{aligned} P(u)(\vec{x}_0) &= u^n(\vec{x}_0) - p_{n-1}u^{n-1}(\vec{x}_0) - \dots - p_1u(\vec{x}_0) - p_0\vec{x}_0 = \vec{0} \\ P(u)(u(\vec{x}_0)) &= u^n(u(\vec{x}_0)) - p_{n-1}u^{n-1}(u(\vec{x}_0)) - \dots - p_1u(u(\vec{x}_0)) - p_0u(\vec{x}_0) \\ &= u(u^n(\vec{x}_0)) - p_{n-1}u(u^{n-1}(\vec{x}_0)) - \dots - p_1u(u(\vec{x}_0)) - p_0u(\vec{x}_0) \\ &= u(\vec{0}) = \vec{0} \end{aligned}$$

De même, $P(u)(u^k(\vec{x}_0)) = u^k(P(u)(\vec{x}_0)) = u^k(\vec{0}) = \vec{0}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

Ainsi, $P(u)$ est un endomorphisme qui s'annule sur la base $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ donc c'est l'endomorphisme nul : $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On dit que P est un polynôme annulateur de $\mathcal{U}$

7c Montrer que $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. Est-ce une base de $\mathcal{L}(E)$?
soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 Id_E + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On évalue en $\vec{x}_0$:

$$\lambda_0 \vec{x}_0 + \lambda_1 u(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

Or la famille de vecteurs $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ est libre dans E . Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Ainsi $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

7d En déduire que :

- Il n'existe aucun polynôme non nul Q de degré strictement inférieur à n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Supposons qu'il existe un polynôme $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_q X^q$ tel que : $q < n$ et $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors on aurait : $a_0 Id_E + a_1 u + \dots + a_q u^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Mais la famille $(Id_E, u, \dots, u^q)$ est une sous-famille de la famille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ donc est libre (d'après 7c).

Donc $a_0 = a_1 = \dots = a_q = 0$ donc $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

- P est l'unique polynôme unitaire de degré n tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Soit $Q = X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$ un polynôme unitaire de degré n tel que $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors :

$$u^n - a_{n-1} u^{n-1} - \dots - a_1 u - a_0 Id_E = u^n - p_{n-1} u^{n-1} - \dots - p_1 u - p_0 Id_E$$

donc :

$$a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 Id_E = p_{n-1} u^{n-1} + \dots + p_1 u + p_0 Id_E$$

et par unicité de la décomposition d'un vecteur dans la famille libre $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$, on a $a_k = p_k$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

Ainsi $P = Q$ est bien unique sous ces conditions.

Le polynôme P est appelé le polynôme minimal de u .

7e Application : déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme u de la question 1.

On procède comme plus haut, on note $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ les vecteurs de la base canonique et on calcule $u^3(\vec{e}_1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

donc $u^3(\vec{e}_1) = 6\vec{e}_1 - 11\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ et le polynôme minimal de u est donc $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

Partie 3 : étude du commutant. Dans cette partie, u désigne toujours un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E , avec E de dimension $n \geq 1$.

On fixe $\vec{x}_0 \in E$ tel que $E = Vect(u^k(\vec{x}_0) / k \in \mathbb{N})$. On rappelle qu'alors, la famille $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ est une base de

8 Montrer que le commutant $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- $C(u) \subset \mathcal{L}(E)$

- $0_{\mathcal{L}(E)} \in C(u)$ car $u \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Soient $f, g \in C(u)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a par linéarité de u :

$$u \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda u \circ f + \mu u \circ g = \lambda f \circ u + \mu g \circ u = (\lambda f + \mu g) \circ u$$

donc $\lambda f + \mu g \in C(u)$.

- Donc le commutant $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

9 Notons $\mathbb{R}[u] = \{Q(u) / Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.

On a déjà de manière évidente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in C(u)$. Comme de plus $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, les combinaisons linéaires de tels vecteurs sont aussi dans $C(u)$. Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a bien $P(u) \in C(u)$. D'où l'inclusion $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.

10a Soient deux endomorphismes v et w de $C(u)$. Montrer que, si $v(\vec{x}_0) = w(\vec{x}_0)$, alors $v = w$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$v(u^k(\vec{x}_0)) = v \circ u^k(\vec{x}_0) = u^k \circ v(\vec{x}_0) = u^k \circ w(\vec{x}_0) = w(u^k(\vec{x}_0))$$

Ainsi v et w coïncident sur la base $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ Elles sont donc égales.

10b Soit $v \in C(u)$.

10bi Justifier l'existence de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $v(\vec{x}_0) = a_{n-1}u^{n-1}(\vec{x}_0) + \dots + a_1u(\vec{x}_0) + a_0\vec{x}_0$.

Comme $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ est une base de E , donc une famille génératrice de E , il existe bien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $v(\vec{x}_0) = a_{n-1}u^{n-1}(\vec{x}_0) + \dots + a_1u(\vec{x}_0) + a_0\vec{x}_0$.

10bii Montrer que $v = a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0Id_E$.

Posons $w = a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0Id_E$. On a clairement que w commute avec u (c'est un polynôme en u !). De plus on a $v(\vec{x}_0) = w(\vec{x}_0)$. Par la question précédente, on en déduit immédiatement que $v = w$.

11 Décrire $C(u)$.

On a déjà que $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. Réciproquement, on vient de montrer que si $v \in C(u)$, alors $v \in \mathbb{R}[u]$.

On en déduit donc que $C(u) = \mathbb{R}[u]$.

12 Déterminer la dimension de $C(u)$.

On sait déjà que la famille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, et qu'il existe un unique polynôme P de degré n et unitaire tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (c'est le polynôme minimal). On va montrer que $\mathbb{R}[u] = Vect(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$:

Prenons un élément de $\mathbb{R}[u]$, il est de la forme $A(u)$ avec $A \in \mathbb{R}[X]$. On fait la division euclidienne de A par P : il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $A = QP + R$ et $\deg(R) < \deg(P) = n$.

On évalue en u : $A(u) = Q(u) \circ P(u) + R(u)$:

Or $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $A(u) = R(u)$. Comme enfin $\deg(R) < n$, on en déduit que $R(u) \in Vect(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$.

Finalement, on a bien que :

$$C(u) = \mathbb{R}[u] = Vect(Id_E, u, \dots, u^{n-1}) :$$

La famille $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ étant libre et génératrice de $C(u)$, c'est donc une base de cet espace, et $\dim(C(u)) = n$.

Problème 2 : opérateur de différence. Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} .

On rappelle que la famille $(P_k)_{k \in [1, n+1]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$).

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et non nul, on note $c(P)$ son coefficient dominant.

Pour un ensemble E et une application $f : E \rightarrow E$, on définit f^k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ par :

$$f^0 = Id_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si V est une partie de E , on dit que V est stable par f si $f(V) \subset V$, i.e., si l'image de tout élément de V par f est dans V .

Partie 1 : l'opérateur de différence : L'opérateur de différence est l'application δ définie par :

$$\delta : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$$

0 Montrer que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta((\lambda P + \mu Q)(X)) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda \delta(P(X)) + \mu \delta(Q(X)) \end{aligned}$$

donc δ est linéaire. De plus,

$$\deg(P(X+1) - P(X)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X))) \leq \deg(P(X))$$

donc d envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1 Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $c(\delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $c(P)$.

On vient de justifier $\deg(\delta(P)) \leq \deg(P)$. Remarquons que $P(X+1)$ et $P(X)$ ont même degré et même coefficient dominant donc en réalité, $\deg(\delta(P)) \leq \deg(P) - 1$.

Notons $P = c(P)X^d + Q$ avec $\deg(Q) \leq d-1$. De même, $\deg(\delta(Q)) \leq d-2$.

Or $\delta(P) = c(P)((X+1)^d - X^d) + \delta(Q)$ et :

$$(X+1)^d - X^d = \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k = dX^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} X^k$$

donc $\deg((X+1)^d - X^d) = d-1 > \deg(\delta(Q))$ donc :

$$\begin{aligned} \deg(\delta(P)) &= d-1 = \deg(P) - 1 \\ c(\delta(P)) &= \frac{c(P)d}{20} = c(P)\deg(P) \end{aligned}$$

2 En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et l'image $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .

Donc si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(\delta(P)) \geq 0$ donc $\delta(P) \notin \ker(\delta)$. Donc $\ker(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

L'inclusion inverse étant évidente, on a $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

D'autre part, $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $\deg(\delta(P)) \leq \deg(P) - 1$ et grâce à la formule du rang, on a :

$$\dim(\text{Im} \delta) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

donc $\ker(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3 Plus généralement, pour $j \in [1, n]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \text{ et } \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (1)$$

On peut procéder par récurrence mais il faut être précis (récurrence sur j ? sur n ? portant sur quelle propriété ? avec un $\forall n$? un $\forall j$?...)

Pour cacher la récurrence, on a en toute généralité, pour δ endomorphisme de E : $\text{Im}(\delta^j) = \underbrace{\delta \circ \delta \circ \dots \circ \delta}_{j \text{ fois}}(E)$ (à détailler si pas évident). Donc :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\delta^j) &= \underbrace{\delta \circ \delta \circ \dots \circ \delta}_{j \text{ fois}}(\mathbb{R}_n[X]) \\ &= \underbrace{\delta \circ \delta \circ \dots \circ \delta}_{j-1 \text{ fois}}(\mathbb{R}_{n-1}[X]) \\ &\quad \vdots \text{ (en utilisant 2 pour } n-1, n-2, \dots) \\ &= \delta(\mathbb{R}_{n-j+1}[X]) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \end{aligned}$$

Ensuite, soit $P \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$, comme $\deg(\delta(P)) \leq \deg(P) - 1$, en itérant, on a : $\deg(\delta^j(P)) \leq \deg(P) - j < 0$ donc $\delta^j(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $P \in \ker(\delta^j)$.

Donc $\mathbb{R}_{j-1}[X] \subset \ker(\delta^j)$.

Par la formule du rang, $\dim(\ker(\delta^j)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Im}(\delta^j)) = n+1 - \dim(\mathbb{R}_{n-j}[X]) = j = \dim(\mathbb{R}_{j-1}[X])$ donc $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

4 On définit l'endomorphisme τ par $\tau = \delta + Id_{\mathbb{R}_n[X]}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [0, k]$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\tau \circ (-Id_{\mathbb{R}_n[X]}) = (-Id_{\mathbb{R}_n[X]}) \circ \delta = -\tau$ donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \delta^k(P) &= (\tau - Id_{\mathbb{R}_n[X]})^k(P) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \tau^j \circ (-Id_{\mathbb{R}_n[X]})^{k-j}(P) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P) \end{aligned}$$

5 Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (2)$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\delta^n(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc 4 donne pour $k = n$: $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

En particulier, la valeur en 0 est : $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)(0) = 0$.

Or $\tau(P) = P(X+1) - P(X) + P(X) = P(X+1)$ donc en itérant : $\tau^j(P) = P(X+j)$ et $\tau^j(P)(0) = P(j)$ donc :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (2)$$

6 Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

6a Pour P polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \delta^2(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Justifier que le sous-espace vectoriel engendré par cette famille est stable par δ .

D'après 1, les polynômes $P, \delta(P), \delta^2(P), \dots, \delta^d(P)$ sont respectivement de degrés $d, d-1, \dots, 1, 0$ donc la famille $(P, \delta(P), \delta^2(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à d donc est libre et est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

Ce sous-espace est stable par δ car si $\deg(P) \leq d$, alors $\deg(\delta(P)) \leq d-1$ donc $\delta(P) \in \mathbb{R}_d[X]$.

6b Montrer réciproquement que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, alors il existe un entier $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$.

Soit alors P un polynôme de V de degré maximal parmi les degrés des polynômes de V . Notons $d = \deg(P)$, $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ car $V \neq \{0\}$.

V est stable par δ donc $P, \delta(P), \dots, \delta^d(P) \in V$ et $V \subset Vect(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$. Or $P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)$ sont respectivement de degrés $d, d-1, \dots, 1, 0$ donc comme ci-dessus, $(P, \delta(P), \delta^2(P), \dots, \delta^d(P))$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Donc $V \subset \mathbb{R}_d[X]$. La réciproque est claire par définition de P comme étant de plus grand degré parmi les polynômes de V .

Donc $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Partie 2 : étude d'une famille de polynômes : On considère la famille de polynômes :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \text{ pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

7 Généralités :

7a Montrer que la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$ donc $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ comme famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n .

7b Calculer $\delta(H_0)$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ en fonction de H_{k-1} .

On a $\delta(H_0) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{l=-1}^{k-2} (X-l) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) (X+1-X+k-1) \\ &= \frac{k}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) = H_{k-1}.\end{aligned}$$

7c Montrer que pour $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Si $k \leq l-1$, on a en itérant 7b :

$$\delta^k(H_l) = H_{l-k}$$

donc :

$$\delta^k(H_l)(0) = H_{l-k}(0) = 0$$

Donc :

$$\delta^l(H_l) = \delta(\delta^{l-1}(H_l)) = \delta(H_1) = H_0$$

donc $\delta^l(H_l)(0) = H_0(0) = 1$.

Et pour $k \geq l+1$, $\delta^k(H_l) = \delta^{k-l}(H_0) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ car $k-l \geq 1$ donc $\delta^k(H_l)(0) = 0$.

Ainsi :

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

7d Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$$

On écrit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $\mathbb{R}_n[X]$: $P = \sum_{l=0}^n a_l H_l$.

On a alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\delta^k(P) = \sum_{l=0}^n a_l \delta^k(H_l)$ donc $\delta^k(P)(0) = \sum_{l=0}^n a_l \delta^k(H_l)(0) = a_k$

d'après 7c. Donc $P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$.

8 Polynômes à valeurs entières :

8a Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

- Si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors vu $H_n = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X-j)$, on a $H_n(k) = 0$.

- Si $k \geq n$, alors $H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{1}{n!} k(k-1) \cdots (k-n+1) = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}$
- Si $k < 0$, on pose $k = -p$, $H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (-p-j) = \frac{(-1)^n}{n!} p(p+1) \cdots (p+n-1) = \frac{(-1)^n (n+p-1)!}{n!(p-1)!} = (-1)^n \binom{n+p-1}{n}$.

8b En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

Les coefficients binomiaux sont des entiers car ils se calculent tous par additions d'entiers par le triangle de Pascal. Donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

8c Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$ donc $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

8d Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in [0, n]}$ sont entières.

Si $P = \sum_{l=0}^n a_l H_l$ et si les a_l sont tous entiers alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) = \sum_{l=0}^n a_l H_l(k) \in \mathbb{Z}$ comme somme et produit d'entiers. Donc P est à valeurs entières.

Réciproquement, si P est à valeurs entières, on a d'après 7d, $P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$ et $(\delta^k(P))(0) \in \mathbb{Z}$ d'après 8c. Donc les coordonnées de P dans la base $(H_k)_{k \in [0, n]}$ sont entières.

8e Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers, alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Etudier la réciproque.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Alors $P = \sum_{k=0}^d (\delta^k(P))(0) H_k$ donc $d!P = \sum_{k=0}^d (\delta^k(P))(0) d!H_k$.

Or pour $k \leq d$:

$$d!H_k = \frac{d!}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) = d(d-1) \cdots (k+1) \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$$

donc $d!H_k$ est un polynôme à coefficients entiers. Donc $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers.

La réciproque est fausse car si on prend par exemple, $P = \frac{1}{2}X^2$, alors $d = 2$ donc $d!P = X^2$ est à coefficients entiers mais P n'est pas à valeurs entières ($P(1) = \frac{1}{2}$).

Partie 3 : Généralisation de l'opérateur de différence et application : Pour une application $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application :

$$\delta(f) : \begin{array}{c} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+1) - f(x) \end{array}$$

- 9a** Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.
 $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 Et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\delta(f))'(x) = f'(x+1) - f'(x) = (\delta(f'))(x)$$

donc $(\delta(f))' = \delta(f')$.

- 9b** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice $j \in [0, n]$).
 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, de même qu'à la question 4, on a :

$$\delta^n(f) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(f)$$

donc :

$$(\delta^n(f))(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j)$$

- 9c** Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe $y_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$\delta(f)(x) = f'(x+y_1)$$

Soit $x > 0$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$.
 On pose $y_1 = c - x$, alors $y_1 \in]0, 1[$ et $\delta(f)(x) = f'(x+y_1)$.

- 9d** En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n) \quad (*)$$

On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.
 Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : "pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$, il existe $y_n \in]0, n[$ tel que : $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$ ".

- I.: $n = 1$, c'est la question 9c.
- H.: Soit $n \geq 1$ pour-lequel cette propriété est vérifiée.

On applique cette propriété à $\delta(f)$: il existe $y_n \in]0, n[$ tel que : $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (\delta(f))(x+j) = (\delta(f))^{(n)}(x+y_n)$.

Or d'après 9a, $(\delta(f))^{(n)} = \delta(f^{(n)})$ donc avec aussi 9b il vient :

$$(\delta^n(\delta(f)))(x) = f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$ entre $f^{(n)}(x+y_n)$ et $f^{(n)}(x+y_n+1)$: il existe $c_n \in]x+y_n, x+y_n+1[$ tel que :

$$(\delta^{n+1}(f))(x) = f^{(n+1)}(c_n)$$

On pose $y_{n+1} = c_n - x$, alors $y_{n+1} \in]y_n, y_n + 1[\subset]0, n + 1[$ et avec 9b on a :

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(x+y_{n+1})$$

- Donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10 On considère dans toute la suite de cette partie un réel α . On suppose que pour tout entier p , si p est premier, alors p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

10a Montrer que pour tout entier k strictement positif, $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$.

k admet une décomposition en produit de facteurs premiers du type $k = p_1^{v_1} \cdots p_s^{v_s}$ où les p_i sont premiers et les $v_i \in \mathbb{N}$. On a :

$$k^\alpha = (p_1^{v_1} \cdots p_s^{v_s})^\alpha = (p_1^\alpha)^{v_1} \cdots (p_s^\alpha)^{v_s}$$

Or on a supposé que tous les p_i^α sont entiers naturels donc k^α est entier naturel comme produit d'entiers naturels.

10b Montrer que α est positif ou nul.

Supposons $\alpha < 0$. Alors pour p premier, $p^\alpha = e^{\alpha \ln(p)} \in]0, 1[$ ne peut être un entier naturel, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\alpha \geq 0$.

10c On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $(f_\alpha)^{(\alpha+1)} = 0$ donc est nulle en tout réel strictement positif, ce qui est suffisant. Réciproquement, si $\alpha \notin \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de f_α est :

$$\forall x > 0, (f_\alpha)^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) x^{\alpha-n} \neq 0$$

car tous les facteurs sont non nuls. Donc par contraposée, si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif, alors $\alpha \in \mathbb{N}$.

11 On applique la relation $(*)$ à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

11a Montrer que l'expression

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$

est un entier relatif.

Pour tout $j \in [0, n]$, $f_\alpha(x+j) = (x+j)^\alpha \in \mathbb{N}$ d'après 10a et car $x \in \mathbb{N}$. Donc $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$ est un entier relatif comme somme et différence d'entiers.

11b Les notations sont celles de la question 9d. Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?

D'après 9b, il existe $y_n \in]0, n[$ tel que $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$.

Rappelons que $(f_\alpha)^{(n)}(x + y_n) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(x + y_n)^{\alpha - n}$ et que $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ et $\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1$ donc $\alpha - n < 0$.

Attention pour conclure à ne pas oublier que y_n dépend de x .

Mais $y_n \in]0, n[$ donc $0 \leq (x + y_n)^{\alpha - n} \leq x^{\alpha - n}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{N}}} x^{\alpha - n} = 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{N}}} (x + y_n)^{\alpha - n} = 0$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{N}}} f_\alpha^{(n)}(x + y_n) = 0$.

11c Conclure.

$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j)$ est donc un entier qui tend vers 0 quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$, donc pour x suffisamment grand, il est nul. (facile en utilisant la quantification de la limite et $\varepsilon = \frac{1}{2}$ par exemple).

Mais $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j) = f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ donc c'est l'une des dérivées de f_α qui s'annule pour x suffisamment grand. Donc d'après 10c, $\alpha \in \mathbb{N}$.