D.S.9 samedi 17 Mai 2025

Exercice : On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2n}{n^4+n^2+1}$.

1 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2 Déterminer un polynôme unitaire (coefficient dominant égal à 1) P, de degré 2,tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)\,P(x+1) = x^4 + x^2 + 1$.

3a Simplifier $P(x+1) - P(x)$ pour tout x réel.

3b En déduire le calcul de la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 2 : Autour de la série harmonique.

1 Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2a On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n+p}$.

Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente.

2b Montrer qu'il existe un entier naturel p_n qui est le plus petit des entiers p tels que $S_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{1}{n+k} > 1$.

On note alors $a_n = n + p_n$ et $u_n = \dfrac{a_n}{n}$.

3 La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4 Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

5 Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors $l \in [2,3]$.

6 Justifier que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$$

7 Prouver que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1$$

8 En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Problème : Soit $n \in \mathbb{N}$. On dispose de $n+1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ telles que pour tout $j \in [|0, n|]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$., avec équiprobabilité.
- A l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule j ($j \in [|0, n|]$), le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note j le numéro de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_j$. Dans chaque urne dans-laquelle est fait un tirage, celui-ci est fait avec équiprobabilité.

Pour tout entier naturel k non nul, on note Y_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $Y_0 = n$.
L'expérience aléatoire est modélisée par un univers Ω et une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω que l'on ne cherchera pas à expliciter.
Pour tout entier naturel k, on considère la matrice colonne W_k de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice carrée A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_k = 0) \\ \mathbf{P}(Y_k = 1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(Y_k = n) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel k, on note respectivement $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$ l'espérance et la variance de Y_k.

Les parties A et B du problème sont indépendantes. La partie C utilise des résultats des parties A et B.

Partie A : espérance et variance de Y_k.

1 : détermination de la loi de Y_{k+1} en fonction de la loi de Y_k. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1a Montrer $\mathbf{P}(Y_{k+1} = 0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \mathbf{P}(Y_k = i)$.

1b Soit $j \in [|0, n|]$. Plus généralement, écrire $\mathbf{P}(Y_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $\mathbf{P}(Y_k = i)$ où $i \in [|0, n|]$ (on justifiera évidemment sa réponse...).

1c En déduire la relation : $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_{k+1} = AW_k$.

2 : calcul de l'espérance de Y_k.

2a On considère la matrice ligne $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$. Verifier que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, BW_k = E(Y_k)$.

2b Déterminer un réel λ tel que $BA = \lambda B$.

2c Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(Y_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$.

2d En déduire l'expression de $E(Y_k)$ en fonction de k et n.

3 : calcul de la variance de Y_k.

3a Déterminer la matrice ligne C de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = E(Y_k^2)$.

3b Déterminer des réels μ et ν tels que $CA = \mu B + \nu C$.

3c Pour tout entier naturel k, exprimer $E\left(Y_{k+1}^2\right)$ en fonction de $E(Y_k^2)$ et $E(Y_k)$.

3d Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = E(Y_k^2) - \dfrac{n}{2^k}$.

3di Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3dii En déduire l'expression de $E(Y_k^2)$ en fonction de k et n.

3diii Exprimer $V(Y_k)$ en fonction de k et n.

Partie B : calcul des puissances de la matrice A par diagonalisation. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $j \in [|0, n|]$, on pose $P_j = X^j$. On désigne par $\mathcal{C} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère :

- pour $\beta \in \mathbb{R}$, l'application $g_\beta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $g_\beta(P) = P(X+\beta)$, c'est-à dire $g_\beta(P) : x \mapsto P(x+\beta)$;
- pour $\alpha \in \{0,1\}$, l'application φ_α qui, à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $\varphi_\alpha(P)$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha(P) & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_\alpha(P)(x) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{x-\alpha} \int_\alpha^x P(t)\,dt \text{ si } x \neq \alpha \\ P(\alpha) \text{ si } x = \alpha \end{array} \right. \end{array}.$$

4 : étude de g_β. Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

4a Justifier que g_β est un automorphisme et $g_\beta^{-1} = g_{-\beta}$.

4b Déterminer la matrice T_β de g_β dans la base $\mathcal{C}$.

4c Justifier que T_β est inversible et déterminer sa matrice inverse.

5 : étude de φ_0 et φ_1.

5a Cas $\alpha = 1$. Vérifier que l'on a : $\forall j \in [|0, n|]$, $\varphi_1(P_j) = \dfrac{1}{j+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{j} X^k$.

5b Cas $\alpha = 0$. Calculer $\varphi_0 (P_j)$ pour tout $j \in [|0, n|]$.

5c Soit $\alpha \in \{0, 1\}$. Montrer que φ_α est linéaire et que l'on peut choisir $\mathbb{R}_n [X]$ comme ensemble d'arrivée de φ_α de sorte que φ_α soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n [X]$.

5d Vérifier que la matrice de φ_1 dans la base $\mathcal{C}$ est A.

5e Déterminer la matrice D de φ_0 dans la base $\mathcal{C}$. On observera que D est diagonale.

6 : calcul des puissances de A. Dans la suite, on prend $\beta = 1$. On pose $g = g_1$ et $T = T_1$ de sorte que $g^{-1} = g_{-1}$ et $T^{-1} = T_{-1}$.

6a Soit $P \in \mathbb{R}_n [X]$. A l'aide d'un changement de variable dans une intégrale, déterminer $\varphi_0 (g (P))$ puis montrer :

$$\left(g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g\right) (P) = \varphi_1 (P)$$

ce qui établit l'égalité $\varphi_1 = g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g$.

6b En déduire une relation entre les matrices A, D, T et T^{-1}.

6c Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer A^k en fonction de D^k, T et T^{-1}.

6d Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dernière colonne de la matrice A^k. Attention : on pourra n'écrire de façon explicite que la ligne d'indice $i + 1$ (pour $i \in [|0, n|]$ quelconque).

Partie C : loi de Y_k.

7 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de Y_k est donnée par :

$$\forall j \in [|0, n|], \ \mathbf{P} (Y_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(j + i + 1)^k}.$$

8 Pour tout $j \in [|0, n|]$, déterminer la limite de $\mathbf{P} (Y_k = j)$ lorsque k tend vers $+\infty$. Interpréter quant à l'issue asymptotique des tirages.

Corrigé de l'exercice : On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2n}{n^4+n^2+1}$.

1 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

On a $n^4+n^2+1 \sim_{+\infty} n^4$ donc $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{2}{n^3}$.

Or ce sont deux séries à termes positifs et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2}{n^3}$ est une série (de Riemann) convergente.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2 Déterminer un polynôme unitaire P, de degré 2,tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)\,P(x+1) = x^4+x^2+1$.

Posons $P(X) = X^2+bX+c$. Alors :

$$\begin{aligned}
P(X)\,P(X+1) &= X^4+X^2+1 \Leftrightarrow \left(X^2+bX+c\right)\left((X+1)^2+b(X+1)+c\right) = X^4+X^2+1 \\
&\Leftrightarrow \left(X^2+bX+c\right)\left(X^2+(2+b)X+1+b+c\right) = X^4+X^2+1 \\
&\Leftrightarrow X^4+(2+2b)X^3+\left(1+3b+2c+b^2\right)X^2+\left(b+b^2+2bc+2c\right)X+c+bc+c^2 \\
&= X^4+X^2+1 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2+2b=0 \\ 1+3b+2c+b^2=1 \\ b+b^2+2bc+2c=0 \\ c+bc+c^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b=-1 \\ c=1 \\ -1+1-2+2=0 \\ 1-1+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow P(X) = X^2-X+1
\end{aligned}$$

3a Simplifier $P(x+1)-P(x)$ pour tout x réel.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x+1)-P(x) = (x+1)^2-(x+1)+1-x^2+x-1 = 2x$$

3b En déduire le calcul de la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

On peut donc simplifier les sommes partielles (elles sont télescopiques) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(k+1)-P(k)}{P(k)\,P(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{P(k)} - \frac{1}{P(k+1)}\right) = \frac{1}{P(1)} - \frac{1}{P(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2-n}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$$

Exercice 2 : Autour de la série harmonique.

1 Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2a On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$.

Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente.

On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{p+1} - S_p = \frac{1}{n+p+1} \geq 0$ donc la suite $(S_p)_{p\geq 0}$ est croissante.

De plus, $\frac{1}{n+p} \sim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}$ et la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p}$ est divergente. Enfin ce sont des séries à termes positifs donc la série $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{n+p}$ est aussi divergente.

Donc la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\geq 1}$ est divergente.

2b Montrer qu'il existe un entier naturel p_n qui est le plus petit des entiers p tels que $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} > 1$.

Cette suite $(S_p)_{p\geq 1}$ est croissante et divergente donc a pour limite $+\infty$.

Donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $S_p > 1$ i.e., $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} > 1$.

L'ensemble des entiers naturels p vérifiant cette propriété est donc non vide (et inclus dans $\mathbb{N}$) donc admet un plus petit élément, noté p_n.

On note alors $a_n = n + p_n$ et $u_n = \frac{a_n}{n}$.

3 La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq n$ donc par minoration, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ donc cette suite n'est pas convergente.

4 Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

Pour tout $k \in [|1, n-1|]$, $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$.

- I.: $n = 2$, $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.

- H. : Soit $n \geq 2$. Supposons $\sum\limits_{k=0}^{2n-2} \dfrac{1}{n+k} > 1$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \\
&> 1 + \frac{3n+1+3n-1}{(3n-1)(3n+1)} - \frac{2}{3n} = 1 + \frac{18n^2 - 2(3n-1)(3n+1)}{3n(3n-1)(3n+1)} \\
&= 1 + \frac{2}{3n(3n-1)(3n+1)} > 1
\end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=0}^{2n-2} \dfrac{1}{n+k} > 1$.

5 Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors $l \in [2,3]$.

Pour $n \geq 2$, on a donc $S_{n-1} < 1 < S_{2n-2}$, et par définition de p_n, $S_{p_n-1} < 1 < S_{p_n}$. Et puisque (S_p) est croissante, il vient :

$$n - 1 \leq p_n - 1 < p_n \leq 2n - 2$$

donc $n \leq p_n \leq 2n-2$ donc $2n \leq a_n \leq 3n-2 \leq 3n$ donc $2 \leq u_n \leq 3$.
Donc si (u_n) converge vers une limite l, on obtient par passage à la limite, $2 \leq l \leq 3$.

6 Jusitifier que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$$

Par définition de p_n (et $a_n = n+p_n$), on a $1 < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ et $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n-1} \leq 1$ donc $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leq 1+\frac{1}{a_n}$.

7 Prouver que l'on a pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$$

La première et la dernière inégalité résultent directement de 6.).
On procède ensuite par comparaison série-intégrale (un dessin est bienvenu).
Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc :

$$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

Donc :

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n-1} \leq 1$$

8 En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Or $\int_n^{a_n} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_n^{a_n} = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$. Donc :

$$e^{1-1/n} \leq u_n \leq e^1$$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{1-1/n} = e$, on a par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

Corrigé du problème : Soit $n \in \mathbb{N}$. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout $j \in [|0,n|]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n.
- A l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule j ($j \in [|0,n|]$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note j le numéro de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.

Pour tout entier naturel k non nul, on note Y_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $Y_0 = n$.

L'expérience aléatoire est modélisée par un univers Ω et une probabilité P sur Ω que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Pour tout entier naturel k, on considère la matrice colonne W_k de $M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice carrée A de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_k=0) \\ \mathbf{P}(Y_k=1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(Y_k=n) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel k, on note respectivement $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$ l'espérance et la variance de Y_k.

Les parties A et B du problème sont indépendantes. La partie C utilise des résultats des parties A et B.

Partie A : espérance et variance de Y_k.

1 : détermination de la loi de Y_{k+1} en fonction de la loi de Y_k. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1a Montrer $\mathbf{P}(Y_{k+1}=0) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\mathbf{P}(Y_k=i)$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\left((Y_k=i)_{0\leq i\leq n}\right)$, on a :

$$\mathbf{P}(Y_{k+1}=0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}((Y_k=i)\cap(Y_{k+1}=0)) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k=i)\,\mathbf{P}_{(Y_k=i)}(Y_{k+1}=0)$$

Or pour $i \in [|0,n|]$, lorsque l'évenement $(Y_k = i)$ est réalisé, le $(k+1)$-ième tirage va avoir lieu dans l'urne $\mathcal{U}_i$ avec équiprobabilité donc $\mathbf{P}_{(Y_k=i)}(Y_{k+1}=0) = \dfrac{1}{k+1}$. D'où :

$$\mathbf{P}(Y_{k+1}=0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\mathbf{P}(Y_k = i)$$

1b Soit $j \in [|0,n|]$. Plus généralement, écrire $\mathbf{P}(Y_{k+1}=j)$ en fonction de certains des nombres $\mathbf{P}(Y_k = i)$ où $i \in [|0,n|]$ (on justifiera évidemment sa réponse...).
Soit $j \in [|0,n|]$. De même, la formule des probabilités totales appliquée au SCE $\left((Y_k = i)_{0 \leq i \leq n}\right)$ donne :

$$\mathbf{P}(Y_{k+1}=j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}((Y_k=i)\cap(Y_{k+1}=j)) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k=i)\,\mathbf{P}_{(Y_k=i)}(Y_{k+1}=j)$$

Or pour tout $i \in [|0,n|]$, le tirage fait dans l'urne $\mathcal{U}_i$ est fait avec équiprobabilité (et cette urne contient les boules numérotées de 0 à i) donc $\mathbf{P}_{(Y_k=i)}(Y_{k+1}=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{i+1} \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ si } j > i \end{cases}$. Ainsi :

$$\mathbf{P}(Y_{k+1}=j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i+1}\mathbf{P}(Y_k = i)$$

1c En déduire la relation : $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_{k+1} = AW_k$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Le calcul du produit AW_k donne :

$$AW_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_k=0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y_k=1) + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathbf{P}(Y_k=n) \\ \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y_k=1) + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathbf{P}(Y_k=n) \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1}\mathbf{P}(Y_k=n) \end{pmatrix} \underset{1\text{b}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_{k+1}=0) \\ \mathbf{P}(Y_{k+1}=1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(Y_{k+1}=n) \end{pmatrix} = W_{k+1}.$$

2 : calcul de l'espérance de Y_k.

2a On considère la matrice ligne $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_{1,n+1}(\mathbb{R})$. Verifier que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $BW_k = E(Y_k)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$BW_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_k=0) \\ \mathbf{P}(Y_k=1) \\ \mathbf{P}(Y_k=2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(Y_k=0) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} i\mathbf{P}(Y_k=i) = E(Y_k).$$

2b Déterminer un réel λ tel que $BA = \lambda B$.

On a :

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \left(0; \frac{1}{2}(0+1); \frac{1}{3}(0+1+2); \ldots; \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\right) \\
&= \left(0; \frac{1}{2}(0+1); \frac{1}{3}\left(\frac{2\times 3}{2}\right); \ldots; \frac{1}{n+1}\frac{n\times(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B
\end{aligned}$$

2c Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(Y_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$E(Y_{k+1}) \underset{2a}{=} BW_{k+1} \underset{1c}{=} BAW_k \underset{2b}{=} \frac{1}{2}BW_k \underset{2a}{=} \frac{1}{2}E(Y_k).$$

2d En déduire l'expression de $E(Y_k)$ en fonction de k et n.

$(E(Y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. D'où :

$$E(Y_k) = \frac{1}{2^k}E(Y_0) = \frac{n}{2^k} \text{ car } Y_0 = n.$$

3 : calcul de la variance de Y_k.

3a Déterminer la matrice ligne C de $M_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $CW_k = E(Y_k^2)$.

Posons $C = \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$CW_k = \sum_{i=0}^{n} i^2 \mathbf{P}(Y_k = i) = E\left(Y_k^2\right).$$

3b Déterminer des réels μ et ν tels que $CA = \mu B + \nu C$.

On a :

$$CA = \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} i^2 \right)_{0 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$$

$$= \left(\frac{1}{j+1} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \right)_{0 \leq j \leq n} = \left(\frac{j(2j+1)}{6} \right)_{0 \leq j \leq n} = \left(\frac{1}{3} j^2 + \frac{1}{6} j \right)_{0 \leq j \leq n} = \frac{1}{3} C + \frac{1}{6} B$$

3c Pour tout entier naturel k, exprimer $E\left(Y_{k+1}^2\right)$ en fonction de $E\left(Y_k^2\right)$ et $E\left(Y_k\right)$.

On a :

$$E\left(Y_{k+1}^2\right) \underset{3a}{=} CW_{k+1} \underset{1c}{=} CAW_k \underset{3b}{=} \left(\frac{1}{3} C + \frac{1}{6} B \right) W_k = \frac{1}{3} CW_k + \frac{1}{6} BW_k \underset{3a \text{ et } 2a}{=} \frac{1}{3} E\left(Y_k^2\right) + \frac{1}{6} E\left(Y_k\right).$$

3d Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = E\left(Y_k^2\right) - \frac{n}{2^k}$.

3di Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

D'après 2d, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E\left(Y_k\right) = \frac{n}{2^k}$. Donc :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= E\left(Y_{k+1}^2\right) - \frac{n}{2^{k+1}} = \frac{1}{3} E\left(Y_k^2\right) + \frac{1}{6} E\left(Y_k\right) - \frac{n}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3} E\left(Y_k^2\right) + \frac{1}{6} E\left(Y_k\right) - \frac{1}{3} \frac{n}{2^k} - \frac{1}{6} \frac{n}{2^k} = \frac{1}{3} \left(E\left(Y_k^2\right) - \frac{n}{2^k} \right) = \frac{1}{3} u_k \end{aligned}$$

donc $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3dii En déduire l'expression de $E\left(Y_k^2\right)$ en fonction de k et n.

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$: $u_k = u_0 \frac{1}{3^k}$ donc :

$$E\left(Y_k^2\right) - \frac{n}{2^k} = \left(E\left(Y_0^2\right) - n \right) \frac{1}{3^k}$$

où $Y_0 = n$ donc $E\left(Y_0^2\right) = n^2$. Ainsi :

$$E\left(Y_k^2\right) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k}$$

3diii Exprimer $V\left(Y_k\right)$ en fonction de k et n.

Par la formule de Huygens, on a donc :

$$V\left(Y_k\right) = E\left(Y_k^2\right) - \left(E\left(Y_k\right)\right)^2 = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.$$

Partie B : calcul des puissances de la matrice A par diagonalisation. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tout $j \in [|0,n|]$, on pose $P_j = X^j$. On désigne par $C = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère :

- pour $\beta \in \mathbb{R}$, l'application $g_\beta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $g_\beta(P) = P(X+\beta)$, c'est-à dire $g_\beta(P) : x \mapsto P(x+\beta)$;
- pour $\alpha \in \{0,1\}$, l'application φ_α qui, à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $\varphi_\alpha(P)$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha(P) & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_\alpha(P)(x) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{x-\alpha} \int_\alpha^x P(t)\,dt \text{ si } x \neq \alpha \\ P(\alpha) \text{ si } x = \alpha \end{array} \right. \end{array}.$$

4 : étude de g_β. Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

4a Justifier que g_β est un automorphisme et $g_\beta^{-1} = g_{-\beta}$.

- Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

  $$g_\beta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+\beta) = \lambda P(X+\beta) + \mu Q(X+\beta) = \lambda g_\beta(P) + \mu g_\beta(Q)$$

  donc $g_\beta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (en effet, $g_\beta(P)$ a même degré que P donc $g_\beta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$).
- Pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, l'équation $Q = g_\beta(P)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à dire $Q(X) = P(X+\beta)$ a pour unique solution $P(X) = Q(X-\beta)$. Donc g_β est bijective et :

  $$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ g_\beta^{-1}(Q) = Q(X-\beta) = g_{-\beta}(Q)$$

  donc g_β est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_\beta^{-1} = g_{-\beta}$.

4b Déterminer la matrice T_β de g_β dans la base C.

Pour tout $j \in [|0,n|]$, $g_\beta(P_j) = P_j(X+\beta) = (X+\beta)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta^{j-i} X^i = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta^{j-i} P_i$.

D'où :

$$T_\beta = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \beta\binom{1}{0} & \beta^2\binom{2}{0} & \cdots & \beta^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \beta\binom{2}{1} & \cdots & \beta^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

4c Justifier que T_β est inversible et déterminer sa matrice inverse.

Puisque g_β est un automorphisme et $g_\beta^{-1} = g_{-\beta}$, la matrice T_β est inversible et $T_\beta^{-} = T_{-\beta}$.

5 : étude de φ_0 **et** φ_1.

5a Cas $\alpha = 1$. Vérifier que l'on a : $\forall j \in [|0,n|]$, $\varphi_1 (P_j) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} X^k$.

Soit $j \in [|0,n|]$.

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 (P_j)(x) &= \frac{1}{x-1} \int_1^x P_j (t)\, dt = \frac{1}{x-1} \int_1^x t^j dt = \frac{1}{x-1} \left[\frac{t^{j+1}}{j+1} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{x-1} \frac{x^{j+1}-1}{j+1} = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} x^k \text{ (somme géométrique)} \end{aligned}$$

- Pour $x = 1$:

$$\varphi_1 (P_j)(1) = P_j (1) = 1^j = 1 = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} 1^k$$

- Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1 (P_j)(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} x^k$, donc $\varphi_1 (P_j) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} X^k$.

5b Cas $\alpha = 0$. Calculer $\varphi_0 (P_j)$ pour tout $j \in [|0,n|]$.
Soit $j \in [|0,n|]$.

- Pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \varphi_0 (P_j)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x P_j (t)\, dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^j dt = \frac{1}{x} \left[\frac{t^{j+1}}{j+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{x} \frac{x^{j+1}}{j+1} = \frac{x^j}{j+1} = \frac{1}{j+1} P_j (x) \end{aligned}$$

- Pour $x = 0$:

$$\varphi_0 (P_j)(0) = P_j (0) = 0^j = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 0 \\ 0 \text{ si } j \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{j+1} \text{ si } j = 0 \\ \dfrac{0}{j+1} \text{ si } j \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{j+1} P_j (0)$$

- Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 (P_j)(x) = \frac{1}{j+1} P_j (x)$ donc $\varphi_0 (P_j) = \frac{1}{j+1} P_j$.

5c Soit $\alpha \in \{0,1\}$. Montrer que φ_α est linéaire et que l'on peut choisir $\mathbb{R}_n [X]$ comme ensemble d'arrivée de φ_α de sorte que φ_α soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n [X]$.
Soit $\alpha \in \{0,1\}$.

- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n [X]$.
  - Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha (\lambda P + \mu Q)(x) &= \frac{1}{x-\alpha} \int_\alpha^x (\lambda P (t) + \mu Q (t))\, dt = \lambda \frac{\int_\alpha^x P (t)\, dt}{x-\alpha} + \mu \frac{\int_\alpha^x Q (t)\, dt}{x-\alpha} \\ &= \lambda \varphi_\alpha (P)(x) + \mu \varphi_\alpha (Q)(x) = (\lambda \varphi_\alpha (P) + \mu \varphi_\alpha (Q))(x) \end{aligned}$$

– pour $x = \alpha$:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\lambda P + \mu Q)(\alpha) &= (\lambda P + \mu Q)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha) \\ &= \lambda \varphi_\alpha(P)(\alpha) + \mu \varphi_\alpha(Q)(\alpha) = (\lambda \varphi_\alpha(P) + \mu \varphi_\alpha(Q))(\alpha)\end{aligned}$$

– Conclusion : $\varphi_\alpha(\lambda P + \mu Q)\,\lambda \varphi_\alpha(P) + \mu \varphi_\alpha(Q)$ donc φ_α est linéaire.

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par linéarité de φ, on a :

$$\varphi_\alpha(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_\alpha(P_k)$$

où $\varphi_\alpha(P_k) \in \mathbb{R}_n[X]$ d'après 5a et 5b.
Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire, il vient :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi_\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$$

donc on peut choisir $\mathbb{R}_n[X]$ comme ensemble d'arrivée de φ_α de sorte que φ_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5d Vérifier que la matrice de φ_1 dans la base $\mathcal{C}$ est A.

Pour tout $j \in [|0, n|]$:

$$\varphi_1(P_j) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} X^k = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} P_k$$

d'où :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} = A$$

5e Déterminer la matrice D de φ_0 dans la base $\mathcal{C}$. On observera que D est diagonale.

Pour tout $j \in [|0, n|]$: $\varphi_0(P_j) = \frac{1}{j+1} P_j$ d'où :

$$D = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

6 : calcul des puissances de A. Dans la suite, on prend $\beta = 1$. On pose $g = g_1$ et $T = T_1$ de sorte que $g^{-1} = g_{-1}$ et $T^{-1} = T_{-1}$.

6a Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. A l'aide d'un changement de variable dans une intégrale, déterminer $\varphi_0(g(P))$ puis montrer :

$$\left(g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g\right)(P) = \varphi_1(P)$$

ce qui établit l'égalité $\varphi_1 = g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$(\varphi_0 \circ g)(P) = \varphi_0(P(X+1)) : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{x} \int_0^x P(t+1)\,dt \text{ si } x \neq 0 \\ P(0+1) = P(1) \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le changement de variables $t' = t+1$ ($dt' = dt$) donne :

$$(\varphi_0 \circ g)(P) : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{x} \int_1^{x+1} P(t')\,dt' \text{ si } x \neq 0 \\ P(1) \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Or $(g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g)(P) = g^{-1}((\varphi_0 \circ g)(P)) = ((\varphi_0 \circ g)(P))(X-1)$. Donc :

$$\left(g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g\right)(P) : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{x-1} \int_1^{x} P(t')\,dt' \text{ si } x \neq 1 \\ P(1) \text{ si } x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ainsi, $(g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g)(P) = \varphi_1(P)$, c'est-à dire :

$$\varphi_1 = g^{-1} \circ \varphi_0 \circ g$$

6b En déduire une relation entre les matrices A, D, T et T^{-1}.
On en déduit $A = T^{-1}DT$

6c Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer A^k en fonction de D^k, T et T^{-1}.
Par récurrence (à rédiger de préférence !), pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = T^{-1}D^kT$.

6d Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dernière colonne de la matrice A^k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La dernière colonne de A^k est A^kE_n où $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Calculons donc $A^k E_n = T^{-1} D^k T E_n$:

$$\begin{aligned}
T^{-1}D^kTE_n &= T^{-1}D^k \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} \\
&= T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+1)^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \frac{1}{2^k}\binom{n}{1} \\ \frac{1}{3^k}\binom{n}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n+1)^k}\binom{n}{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Soit $i \in [|0, n|]$. Calculons ce dernier produit en n'écrivant explicitement que la ligne d'indice $i+1$ (la numérotation des lignes va de 1 à $n+1$) :

$$\begin{pmatrix} & & & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{i}{i} & (-1)\binom{i+1}{i} & & (-1)^2\binom{i+2}{i} & \cdots & (-1)^{n-i}\binom{n}{i} \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \frac{1}{2^k}\binom{n}{1} \\ \frac{1}{3^k}\binom{n}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n+1)^k}\binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

La dernière colonne de A^k est donc en explicitant seulement la ligne d'indice $i+1$:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{l=i}^{n} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} \frac{1}{(l+1)^k} \binom{n}{l} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Partie C : loi de Y_k.

7 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de Y_k est donnée par :

$$\forall j \in [|0, n|], \ \mathbf{P}(Y_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(j+i+1)^k}.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $W_k = A^k W_0$:

- I.: $A^0W_0 = I_{n+1}W_0 = W_0$
- H.: Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $W_k = A^kW_0$. Alors :

$$W_{k+1} \underset{1b}{=} AW_k = AA^kW_0 = A^{k+1}W_0$$

- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$W_k = A^kW_0 = A^kE_n \text{ car } W_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(Y_0 = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(Y_0 = n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_n$$

Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [|0, n|]$:

$$\mathbf{P}(Y_k = j) = \sum_{l=j}^{n} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} \frac{1}{(l+1)^k} \binom{n}{l} \underset{i=l-j}{=} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{i+j}{i} \frac{1}{(i+j+1)^k} \binom{n}{i+j}$$

Or

$$\binom{i+j}{i}\binom{n}{i+j} = \frac{(i+j)!}{j!i!} \frac{n!}{(i+j)!(n-i-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{i!(n-j-i)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}$$

donc on obtient :

$$\forall j \in [|0, n|], \ \mathbf{P}(Y_k = j) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \frac{1}{(j+i+1)^k} \binom{n-j}{i}.$$

8 Pour tout $j \in [|0, n|]$, déterminer la limite de $\mathbf{P}(Y_k = j)$ lorsque k tend vers $+\infty$. Interpréter quant à l'issue asymptotique des tirages.

Soit $j \in [|0, n|]$. Pour $i \in [|0, n|]$ tel que $i + j \neq 0$ (c'est-à-dire $(i, j) \neq (0, 0)$), on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{(i+j+1)^k} = 0$.

Ainsi :

- Si $j \neq 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{P}(Y_k = j) = 0$
- Si $j = 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{P}(Y_k = 0) = \binom{n}{0} (-1)^0 1 \binom{n}{0} = 1$.

Cela signifie qu'à partir d'un certain rang, avec une probabilité proche de 1, les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_0$ ne contenant que la boule numéro 0.