

D.S.10 14 Juin 2025

ATTENTION : Ne faites que les exercices 1,2 et 3. Si vous avez fini, vous pouvez attaquer les 2 exercices suivants en commençant par le premier (ETOILE 1 et ETOILE 2).

SAUF : Brossard, Boucher, Frossard, Bula, Robin, Esnault, Guillou, qui ne font que les exos ETOILE1 et ETOILE2, je conseille de commencer par le premier.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$$

Soit $\Delta : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1) P'' + 2XP'$$

1 Vérifier que l'application $(. | .)$ définit un produit scalaire sur E .

On notera $\|.\|$ la norme associée.

2a Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

2b Ecrire la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

En déduire $rg(\Delta)$.

Δ est-il un automorphisme de E ?

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

2c Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Montrer que l'endomorphisme $\Delta - \lambda_k Id_E$ est non injectif.

En déduire l'existence d'un polynôme P_k de E tel que :

- P_k est de degré k .
- le coefficient dominant de P_k vaut 1.
- $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$.

2d Montrer que pour tous $P, Q \in E$, on a : $(\Delta(P) | Q) = (P | \Delta(Q))$.

Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

2e En déduire que pour tous $(k, h) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tels que $k \neq h$, on a $(P_k | P_h) = 0$.

2f Montrer qu'on peut choisir une base de E dans-laquelle la matrice de Δ est diagonale.

Cette base peut-elle être choisie orthonormée ?

Exercice 2 : calcul d'une somme de série. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2 Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite (qui n'est pas à calculer pour l'instant).

3 Montrer que la série $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.

4 En déduire que $l = 0$.

5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

5a Montrer que :

$$\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5b En déduire α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge (montrer que la condition sur α est nécessaire et suffisante).

6 On suppose que α prend la valeur trouvée à la question précédente et on pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(v_n)$.

6a Montrer que la suite $(\ln(n^{3/2}u_n))$ converge vers $S + \ln\left(\frac{2}{5}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire alors que :

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$$

puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

6b En partant de $2ku_k = (2k+2)u_k - 2u_k$, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = 2 \sum_{k=2}^{n+2} ku_k + 3 \sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

6c On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

En utilisant la relation précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 3 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 3 : Etude d'une variable aléatoire. On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

n est un entier naturel non nul et Ω_n désigne l'ensemble des successions de n fois "Pile" ou "Face" (donc un univers modélisant une suite de n lancers).

Ω_n est muni d'une probabilité $\mathbf{P}$, conformément aux hypothèses faites ci-dessus sur les lancers et sur la pièce.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i -ième lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire. On appelle série une succession de lancers qui amènent tous le même côté de la pièce.

Etant donnée une série de lancers, notée ω et k un entier, $k \leq n$, on note N_k le nombre de séries observées lors des k premiers lancers.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent (dans l'ordre) FFPPPPFFPPP, on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_n$:

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= N_2(\omega) = 1; N_3(\omega) = \dots = N_6(\omega) = 2 \\ N_7(\omega) &= N_8(\omega) = 3; N_9(\omega) = \dots = N_{11}(\omega) = 4 \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer $N_{12}(\omega)$ (disons que $n \geq 12$ dans cet exemple).

1 Déterminer rapidement les lois de N_1 et N_2 et donner leurs espérances et variances.

2 Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega_n)$ puis calculer les valeurs de $\mathbf{P}(N_n = 1)$ et $\mathbf{P}(N_n = n)$.

3 : Fonction génératrice de N_n . On suppose dans les questions suivantes que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$:

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k.$$

3a Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

3b Que représente $G'_n(1)$?

3c Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [1, n]$, on a :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On admettra qu'on a aussi :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$$

Montrer alors que :

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1)$$

3d Soient $n \geq 2$ et $s \in [0, 1]$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.

En déduire $G_n(s)$ en fonction de n et de s .

3e Déterminer l'espérance de N_n .

3f Déterminer la variance de N_n .

3g Donner grâce à l'expression trouvée de $G_n(s)$ la loi de la variable aléatoire N_n . Reconnaître la loi de $N_n - 1$.

Exercice ETOILE 1 :

1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.

2 Etant donné un univers Ω fini muni d'une probabilité P , une variable aléatoire X suit une loi de Rademacher si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et :

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs réelles, mutuellement indépendantes, et suivant toutes une loi de Rademacher.

On admettra cette forme du lemme des coalitions : si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ le sont aussi, pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_n$.

Pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $S = \sum_{i=1}^n c_i X_i$.

2a Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$E(\exp(tS)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$$

(où $E(\dots)$ désigne l'espérance).

2b Rappeler et redémontrer l'inégalité de Markov.

2c Déduire des questions précédentes que pour tout $t \geq 0$, et pour tout $x \geq 0$:

$$P(\exp(x|S|) > e^{tx}) \leq 2e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right)$$

2d On suppose $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$P(|S| > t) \leq 2 \exp\left(\frac{-t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Exercice ETOILE 2 : Soit ϕ une application continue strictement positive sur $[-1, 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire euclidien défini par $(P | Q) = \int_{-1}^1 \phi(t) P(t) Q(t) dt$ et on note $\|P\|$ la norme associée.

La question 4 est indépendante des questions 1, 2 et 3.

1 On admet *presque* qu'il s'agit en effet d'un produit scalaire : montrer seulement le caractère défini positif.

2a Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ tels que

- (1) : $\forall k \in [0, n], \deg(P_k) = k$
- (2) : $\forall (i, j) \in [0, n]^2, i \neq j \Rightarrow (P_i | P_j) = 0$.
- (3) : $\forall k \in [0, n], \|P_k\| = 1$.

2b Soit $k \in [1, n]$.

2bi Montrer que P_k a au moins une racine réelle dans $] -1, 1[$.

2bii Montrer que $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$.

2biii On appelle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_k dans $] -1, 1[$ **en-lesquelles** P_k **change de signe**. En considérant le produit scalaire de P_k avec un polynôme bien choisi, montrer que $p = k$. Conclure sur la multiplicité des racines de P_k et le caractère scindé sur $\mathbb{R}$.

2c Montrer que pour tout $k \in [1, n-1]$, le polynôme XP_k appartient au sous-espace $Vect(P_{k-1}, P_k, P_{k+1})$.

3 Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction constante égale à 1. Ainsi $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$.

3a Justifier qu'il existe des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ uniques tels que :

- (1) : $\forall k \in [0, n], \deg(L_k) = k$
- (2) : $\forall (i, j) \in [0, n]^2, i \neq j \Rightarrow (L_i | L_j) = 0$.
- (3) : $\forall k \in [0, n], L_k(1) = 1$.

3b Montrer que pour $k \in [0, n]$ fixé, il existe Q_k unique vérifiant les 3 conditions :

$$\deg(Q_k) = 2k, \quad (X-1)^k \text{ divise } Q_k, \quad L_k = Q_k^{(k)} \text{ (dérivée } k\text{-ième)}$$

3c En utilisant les questions précédentes, montrer que $(X+1)^n$ divise Q_n . Indication : justifier que pour tout $k \in [0, n-1]$, $(L_n | X^k) = 0$ et commencer par examiner ce que donne $k = 0$ puis $k = 1$.

3d En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \mu(X^2 - 1)^n$ puis montrer que $\mu = \frac{1}{2^n n!}$.

4 Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction $\phi(t) = \sqrt{1-t^2}$. On admettra que $(P \mid Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P(t) Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'on n'aura pas à utiliser les questions 2 et 3 dans cette question.

4a Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin((n+1)x) = \sin(x) Q_n(\cos(x))$$

Indication : prouver séparément l'existence et l'unicité, et pour l'existence, passer par les nombres complexes.

4b Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n .

4c Montrer que les Q_k sont deux à deux orthogonaux.

On admettra qu'on peut aussi montrer que $\|Q_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4d On considère l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = \int_{-1}^1 (t^3 - xt^2 - yt - z)^2 \sqrt{1-t^2} dt$. Montrer que g admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint. Calculer ce minimum (on pourra admettre $(X^3 \mid X) = \frac{\pi}{16}$ et $\|X^3\|^2 = \frac{5\pi}{128}$ et $\|X\|^2 = \frac{\pi}{8}$ en indiquant comment faire ces calculs).

Corrigé de l'exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, (P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$$

Soit $\Delta : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = (X^2 - 1) P'' + 2XP'$$

1 Vérifier que l'application $(. | .)$ définit un produit scalaire sur E .

Déjà vu en cours ou TD. Je rappelle juste que pour le caractère défini positif, il faut argumenter ainsi :

soit P tel que $(P | P) = 0$. Alors $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$. Or pour tout $t \in [-1, 1]$, $P^2(t) \geq 0$ et P^2 est continue sur $[-1, 1]$ donc P^2 et donc d'après le théorème de l'intégrale nulle, P est nulle sur $[-1, 1]$. Donc P admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

2a Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (X^2 - 1)(\lambda P + \mu Q)'' + 2X(\lambda P + \mu Q)' \\ &= (X^2 - 1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 2X(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda((X^2 - 1)P'' + 2XP') + \mu((X^2 - 1)Q'' + 2XQ') \\ &= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q) \end{aligned}$$

donc Δ est linéaire.

De plus, avec $\deg(P) \leq n$, on a $\deg(P') \leq n-1$ et $\deg(P'') \leq n-2$ donc $\deg((X^2 - 1)P'') \leq n$ et $\deg(2XP') \leq n$ donc $\deg(\Delta(P)) \leq n$ donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc Δ est bien un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

2b Ecrire la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Commençons par calculer les cas particuliers $\Delta(1)$ et $\Delta(X)$:

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= 0 \\ \Delta(X) &= 2X \end{aligned}$$

Soit ensuite $j \in [2, n]$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(X^j) &= (X^2 - 1)j(j-1)X^{j-2} + 2XjX^{j-1} \\ &= j(j-1)X^j + 2jX^j - j(j-1)X^{j-2} \\ &= j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2} \end{aligned}$$

d'où la matrice de Δ dans la base canonique, matrice de taille $(n+1, n+1)$, où le coefficient

diagonal indiqué $(j(j+1))$ se trouve en $(j+1)$ -ième position :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & -j(j-1) & 0 \\ & & 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & j(j+1) & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

En déduire $rg(\Delta)$.

La première colonne est nulle. Les n colonnes suivantes forment une famille libre car échelonnée (en colonnes !) donc $rg(\Delta) = n$.

Δ est-il un automorphisme de E ?

$\dim(E) = n+1 > n = rg(\Delta)$ donc Δ n'est pas un automorphisme de E .

Pour tout $k \in [0, n]$, on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

2c Soit $k \in [0, n]$.

Montrer que l'endomorphisme $\Delta - \lambda_k Id_E$ est non injectif.

Soit $k \in [0, n]$. Vu la matrice de Δ , la matrice de $\Delta - \lambda_k Id_E$ (dans la base canonique de E) est triangulaire supérieure avec un terme nul sur la diagonale (en position $k+1$). Donc elle n'est pas inversible. Donc $\Delta - \lambda_k Id_E$ n'est pas bijectif donc pas injectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

En déduire l'existence d'un polynôme P_k de E tel que :

- P_k est de degré k .
- le coefficient dominant de P_k vaut 1.
- $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$.

Donc $\ker(\Delta - \lambda_k Id_E) \neq \{0\}$. Soit alors $Q_k \in \ker(\Delta - \lambda_k Id_E)$, Q_k non nul. Soit $d = \deg(Q_k)$.

Vu la matrice de Δ , donc celle de $\Delta - k(k+1) Id_E$, il est clair (puisque cette matrice est triangulaire supérieure avec un unique coefficient diagonal nul, en position $k+1$) que pour tout polynôme $Q \in E$, si $\deg(Q) \neq k$, alors $\deg((\Delta - \lambda_k Id_E)(Q)) = \deg(Q)$. Or $(\Delta - \lambda_k Id_E)(Q_k) = 0$ donc $d = k$.

Posons $P_k = \frac{Q_k}{c(Q_k)}$ (on divise par le coefficient dominant). Alors P_k est de degré k , unitaire et dans $\ker(\Delta - \lambda_k Id_E)$ donc $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$.

Remarque : si $j < k$ ou $j > k$, alors $j(j+1) < k(k+1)$ ou $j(j+1) > k(k+1)$ ce qui garantit que la diagonale de la matrice de $\Delta - \lambda_k Id_E$ ne contient pas d'autre élément non nul que le $k+1$ -ième.

2d Montrer que pour tous $P, Q \in E$, on a : $(\Delta(P) | Q) = (P | \Delta(Q))$.

Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

Soient $P, Q \in E$. On a :

$$(\Delta(P) | Q) = \int_{-1}^1 \Delta(P)(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1) P''(t) + 2t P'(t)) Q(t) dt$$

on intègre par partie en posant $\begin{cases} u(t) = (t^2 - 1)P'(t) \\ v(t) = Q(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = (t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t) \\ v'(t) = Q'(t) \end{cases}$
d'où :

$$\begin{aligned} (\Delta(P) | Q) &= [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt \end{aligned}$$

et ce résultat est inchangé quand on échange P et Q .

Donc le même calcul donne $(\Delta(Q) | P) = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt = (\Delta(P) | Q)$.

Enfin, par symétrie du produit scalaire, $(\Delta(P) | Q) = (\Delta(Q) | P) = (P | \Delta(Q))$.

2e En déduire que pour tous $(k, h) \in [0, n]^2$ tels que $k \neq h$, on a $(P_k | P_h) = 0$.

Soient $k, h \in [0, n]$ avec $k \neq h$.

On a $(\Delta(P_k) | P_h) = (P_k | \Delta(P_h))$ donc $(\lambda_k P_k | P_h) = (P_k | \lambda_h P_h)$ donc $\lambda_k (P_k | P_h) = \lambda_h (P_k | P_h)$. Or $k \neq h$ donc $\lambda_k \neq \lambda_h$ (voire remarque du 2c). Donc $(P_k | P_h) = 0$.

2f Montrer qu'on peut choisir une base de E dans laquelle la matrice de Δ est diagonale.

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n donc c'est une base de E . Et puisque que pour tout k , $\Delta(P_k) = \lambda_k P_k$, la matrice de Δ dans cette base est diagonale (d'éléments diagonaux $\lambda_0, \dots, \lambda_n$).

Cette base peut-elle être choisie orthonormée ?

Cette base est déjà orthogonale (vu 2e). En posant $\tilde{P}_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$, on obtient une BON $(\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_n)$ dans laquelle la matrice de Δ est diagonale.

Exercice 2 : calcul d'une somme de série. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

On a $u_0 > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n > 0$.

Donc, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2 Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite (qui n'est pas à calculer pour l'instant).

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} < 1$ et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Or elle est minorée par 0. Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente, de limite $l \geq 0$.

3 Montrer que la série $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5} u_n\right) = \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{3}{2n+2}\right)$$

Or $\ln(1 + X) \sim_0 X$ donc par substitution, $\ln\left(1 + \frac{3}{2n+2}\right) \sim_0 \frac{3}{2n+2} \sim_0 \frac{3}{2n}$.

La série $\sum \frac{3}{2n}$ est divergente (série harmonique $\times \frac{3}{2}$), et ce sont des SATP (séries à termes positifs), de termes généraux équivalents. Donc, aussi, la série $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.

4 En déduire que $l = 0$.

Or c'est une série télescopique de sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) = \ln(u_0) - \ln(u_n)$$

Donc la suite $(\ln(u_n))$ est divergente. Or si $l \neq 0$, elle convergerait vers $\ln(l)$. Donc $l = 0$.

5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

5a Montrer que :

$$\ln(v_n) = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a pour tout n :

$$\begin{aligned} \ln(v_n) &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) \\ &= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1+1/n}{1+5/(2n)}\right) = (\alpha+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) \end{aligned}$$

Or $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ donc par substitution :

$$\begin{aligned} \ln(v_n) &= (\alpha+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(\alpha+1 - \frac{5}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{25}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

5b En déduire α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge (montrer que la condition sur α est nécessaire et suffisante).

Si $\alpha \neq \frac{3}{2}$, alors $\ln(v_n) \sim_{+\infty} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n}$, série divergente, et à termes de signes constants.

Donc la série $\sum \ln(v_n)$ est alors divergente.

Si $\alpha = \frac{3}{2}$, alors $\frac{21}{8} - \frac{\alpha}{2} = \frac{15}{8}$ et $\ln(v_n) \sim_{+\infty} \frac{15}{8} \frac{1}{n^2}$, série (de Riemann) convergente, et SATP, donc la série $\sum \ln(v_n)$ est alors convergente.

Ainsi la série $\sum \ln(v_n)$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{3}{2}$.

6 On suppose que α prend la valeur trouvée à la question précédente et on pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(v_n)$.

6a Montrer que la suite $(\ln(n^{3/2}u_n))$ converge vers $S + \ln\left(\frac{2}{5}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire alors que :

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$$

puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Pour $\alpha = \frac{3}{2}$, on a $v_n = \frac{(n+1)^{3/2}u_{n+1}}{n^{3/2}u_n}$ donc $\ln(v_n) = \ln((n+1)^{3/2}u_{n+1}) - \ln(n^{3/2}u_n)$, série télescopique de sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_k) = \ln(n^{3/2}u_n) - \ln(u_1)$$

qui converge vers S . Donc la suite $(\ln(n^{3/2}u_n))$ converge vers $S + \ln(u_1) = S + \ln\left(\frac{2}{5}\right)$.

Par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2}u_n = e^{S + \ln\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{2}{5}e^S \neq 0$ donc $n^{3/2}u_n \sim_{+\infty} \frac{2}{5}e^S$
donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$.

6b En partant de $2ku_k = (2k+2)u_k - 2u_k$, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k = 2 \sum_{k=2}^{n+2} ku_k + 3 \sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

On a :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k &= \sum_{k=1}^{n+1} ((2k+2)u_k - 2u_k) = \sum_{k=1}^{n+1} (2k+2)u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (2k+5)u_{k+1} - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)u_{k+1} + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_{k+1} - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\ &= 2 \sum_{k=2}^{n+2} ku_k + 3 \sum_{k=2}^{n+2} u_k - 2 \sum_{k=1}^{n+1} u_k \end{aligned}$$

6c On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

En utilisant la relation précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 3 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

La relation précédente se réécrit :

$$2 \sum_{k=1}^{n+1} ku_k - 2 \sum_{k=2}^{n+2} ku_k = 3(T_n + u_{n+1} + u_{n+2} - u_0 - u_1) - 2(T_n + u_{n+1} - u_0)$$

donc

$$2u_1 - 2(n+2)u_{n+2} = T_n + u_{n+1} + 3u_{n+2} - u_0 - 3u_1$$

donc

$$\begin{aligned} T_n &= 5u_1 + u_0 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= 2 + 1 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1} = 3 - (2n+7)u_{n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

Or d'après 6a, on a $u_{n+2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^S}{5(n+2)^{3/2}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2e^S}{5n^{3/2}}$

donc $(2n+7)u_{n+2} \sim_{n \rightarrow +\infty} 2n \frac{2e^S}{5n^{3/2}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4e^S}{5\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+7)u_{n+2} = 0$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 3$. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3$$

Problème 1 : Etude d'une variable aléatoire. On effectue une succession de lancers indépendants d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$. n est un entier naturel non nul et Ω_n désigne l'ensemble des successions de n fois "Pile" ou "Face" (donc un univers modélisant une suite de n lancers).

Ω_n est muni d'une probabilité P , conformément aux hypothèses faites ci-dessus sur les lancers et sur la pièce.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i -ième lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire.

On appelle série une succession de lancers qui amènent tous le même côté de la pièce.

Etant donnée une série de lancers, notée ω et k un entier, $k \leq n$, on note N_k le nombre de séries observées lors des k premiers lancers.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent (dans l'ordre) FFPPPPFFPPP, on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_n$:

$$\begin{aligned} N_1(\omega) &= N_2(\omega) = 1; N_3(\omega) = \dots = N_6(\omega) = 2 \\ N_7(\omega) &= N_8(\omega) = 3; N_9(\omega) = \dots = N_{11}(\omega) = 4 \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer $N_{12}(\omega)$ (disons que $n \geq 12$ dans cet exemple).

1 Déterminer rapidement les lois de N_1 et N_2 et donner leurs espérances et variances.

Que le premier lancer donne Pile ou Face, on a $N_1 = 1$ donc $E(N_1) = 1$ et $V(N_1) = 0$.

Les deux premiers lancers donnent :

- PP avec probabilité p^2 (alors $N_2 = 1$).
- PF avec probabilité pq (alors $N_2 = 2$).
- FP avec probabilité pq (alors $N_2 = 2$).
- FF avec probabilité q^2 (alors $N_2 = 1$).

d'où la loi de N_2 :

k	1	2
$\mathbf{P}(N_2 = k)$	$p^2 + q^2$	$2pq$

d'où $E(N_2) = p^2 + q^2 + 4pq = 1 + 2pq$ car $(p + q)^2 = 1^2 = 1$.
 Et $E(N_2^2) = p^2 + q^2 + 8pq = 1 + 6pq$ donc (Huygens) :

$$V(N_2) = E(N_2^2) - (E(N_2))^2 = 1 + 6pq - 1 - 4pq - 4p^2q^2 = 2pq - 4p^2q^2 = 2pq(1 - 2pq)$$

2 Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega_n)$ puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

On a $N_n(\Omega_n) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

$N_n = 1$ ssi on n'obtient que des piles ou que des faces, événements incompatibles qui se produisent (par indépendance) avec les probabilités respectives p^n et q^n .

Donc $\mathbf{P}(N_n = 1) = p^n + q^n$.

$N_n = n$ ssi on obtient une des deux séries des lancers avec une alternance de Pile et de Face à chaque lancer, et commençant l'une par Pile, l'autre par Face.

Il faut discuter selon la parité de n :

- Si n est pair :

$$\mathbf{P}(N_n = n) = \mathbf{P}(\{PFPP \dots PF; FPPF \dots FPF\}) = p^{n/2}q^{n/2} + q^{n/2}p^{n/2} = 2p^{n/2}q^{n/2}.$$

- Si n est impair :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_n = n) &= \mathbf{P}(\{PFPP \dots PFP; FPPF \dots FPF\}) \\ &= p^{(n+1)/2}q^{(n-1)/2} + q^{(n+1)/2}p^{(n-1)/2} = p^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2}(p + q) = p^{(n-1)/2}q^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

3 : Fonction génératrice de N_n . On suppose dans les questions suivantes que la pièce est équilibrée,

c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$:

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k.$$

3a Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

Puisque $N_n(\Omega_n) = \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après le théorème de transfert :

$$E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k = G_n(s).$$

3b Que représente $G'_n(1)$?

$$\forall s \in [0, 1], G'_n(s) = \sum_{k=1}^n kP(N_n = k) s^{k-1} \text{ donc } G'_n(1) = \sum_{k=1}^n kP(N_n = k) = E(N_n).$$

3c Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

(P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements donc :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \mathbf{P}((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) + \mathbf{P}((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Or on remarque que $(N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n = (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ car si les deux derniers lancers sont identiques, le dernier lancer ne change pas le nombre de séries.
De plus, les lancers étant indépendants, les événements $(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}$ et P_n sont indépendants donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) \\ &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) \mathbf{P}(P_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n) &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &= \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \mathbf{P}(P_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \quad (1)$$

On admettra qu'on a aussi :

$$\mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \quad (2)$$

Montrer alors que :

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1)$$

(P_n, F_n) étant un système complet d'événements, on a donc par addition de (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_n = k) &= \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) \text{ car } (P_{n-1}, F_{n-1}) \text{ est aussi un SCE.} \end{aligned}$$

3d Soient $n \geq 2$ et $s \in [0, 1]$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.

On a donc pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_n = k) s^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1)) s^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) s^k \end{aligned}$$

Or $\mathbf{P}(N_{n-1} = n) = 0$ donc $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_{n-1} = k) s^k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) s^k = G_{n-1}(s)$.

Et $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_{n-1} = k-1) s^k = s \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(N_{n-1} = k) s^{k-1} = s G_{n-1}(s)$.

Donc $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.

En déduire $G_n(s)$ en fonction de n et de s .

Par récurrence immédiate, on obtient $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} G_1(s) = s \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$ car $G_1(s) = 1 \times s = s$.

3e Déterminer l'espérance de N_n .

On a donc $G'_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}$ si $n \geq 2$ et $s \in [0, 1]$.

Donc pour $n \geq 2$, $E(N_n) = G'_n(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$ (formule encore vraie pour $n = 1$).

3f Déterminer la variance de N_n .

D'après le théorème de transfert :

$$E(N_n(N_n - 1)) = \sum_{k=1}^n k(k-1) \mathbf{P}(N_n = k) = G''_n(1)$$

Or pour $n \geq 3$, $G''_n(s) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} + s \frac{(n-1)(n-2)}{4} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}$
donc :

$$E(N_n(N_n - 1)) = n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{4} = \frac{(n-1)(n+2)}{4}$$

D'après la formule de Huygens, il vient :

$$\begin{aligned} V(N_n) &= E(N_n^2) - (E(N_n))^2 = E(N_n(N_n - 1)) + E(N_n) - (E(N_n))^2 \text{ (linéarité de } E(.)) \\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{n+1}{4} (2 - (n+1)) \\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{4} + \frac{(n+1)(1-n)}{4} = \frac{n-1}{4} (n+2 - (n+1)) = \frac{n-1}{4} \end{aligned}$$

et cette formule est encore valable si $n = 1$ ou $n = 2$.

3g Donner grâce à l'expression trouvée de $G_n(s)$ la loi de la variable aléatoire N_n . Reconnaître la loi de $N_n - 1$.

Pour tout $s \in [0, 1]$, $G_n(s) = s \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} = \frac{s}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} s^k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} s^j$
(en posant $j = k + 1$).

Or $G_n(s) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N_n = k) s^k$ est polynômiale, ainsi le polynôme $G_n(X) - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k$ s'annule en tout point de $[0, 1]$ donc a une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul. Donc ses coefficients sont nuls, i.e. pour tout $k \in [1, n]$:

$$\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$$

Donc $\forall j \in [0, n-1]$, $\mathbf{P}(N_n - 1 = j) = \mathbf{P}(N_n = j + 1) = \binom{n-1}{j} \frac{1}{2^{n-1}}$.

On reconnaît que $N_n - 1$ suit la loi binomiale de paramètres $n - 1$ et $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice supplémentaire : A NE TRAITER QUE SI VOUS AVEZ FINI LE REST

1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n!}}{2} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ car } (1 + (-1)^n) = 0 \text{ ou } 2 \text{ selon la parité de } n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ (poser } k = 2n \text{ et renommer } k\text{)}. \end{aligned}$$

Or $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$. Comparons les deux séries "terme à terme" :

- si $n = 0$, $\frac{x^{2n}}{(2n)!} = x^{2n} = \frac{x^{2n}}{2^n n!}$.

- si $n \geq 1$:

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)(2n)}{2^n} = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{2} \geq 1$$

car $\frac{n+k}{2} \geq 1$ pour $k \geq 1$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ et les deux sommes convergent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}, \text{ i.e. } \cosh(x) \leq e^{x^2/2}.$$

2 Etant donné un univers Ω fini muni d'une probabilité P , une variable aléatoire X suit une loi de Rademacher si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et :

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Dans la suite de l'exercice, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes, et suivant toutes une loi de Rademacher.

Pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $S = \sum_{i=1}^n c_i X_i$.

2a Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$E(\exp(tS)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$$

(où $E(\dots)$ désigne l'espérance).

On a :

$$E(\exp(tS)) = E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n t c_i X_i\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{t c_i X_i}\right)$$

Or $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes donc les variables aléatoires $Y_i = e^{t c_i X_i}$ le sont aussi donc :

$$E(\exp(tS)) = \prod_{i=1}^n E(e^{t c_i X_i})$$

Or d'après le théorème de transfert, $E(e^{t c_i X_i}) = \frac{1}{2}(e^{t c_i} + e^{-t c_i})$ vue la loi que suit X_i . Donc :

$$\begin{aligned} E(\exp(tS)) &= \prod_{i=1}^n \cosh(t c_i) \\ &\stackrel{\text{d'après 1.})}{\leq} \prod_{i=1}^n e^{t^2 c_i^2 / 2} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{t^2 c_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right). \end{aligned}$$

2b Rappeler et redémontrer l'inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X)$$

Vu en cours.

2c Dédurre des questions précédentes que pour tout $t \geq 0$, et pour tout $x \geq 0$:

$$P(e^{x|S|} > e^{tx}) \leq 2e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right)$$

Soient $t, x \in \mathbb{R}^+$. Considérons d'abord $P(e^{xS} > e^{tx})$: e^{xS} est une variable aléatoire positive donc avec $\alpha = e^{tx}$, on a :

$$\begin{aligned} P(e^{xS} > e^{tx}) &\leq P(e^{xS} \geq e^{tx}) \leq \frac{1}{e^{tx}} E(e^{xS}) \\ &\leq e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right) \text{ d'après 2a} \end{aligned}$$

En appliquant ceci à $(-c_1, \dots, -c_n)$, on remplace S par $-S$ et on a donc aussi :

$$P(e^{-xS} > e^{tx}) \leq e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$$

Or on a : $(e^{x|S|} > e^{tx}) \subset (e^{xS} > e^{tx}) \cup (e^{-xS} > e^{tx})$ donc :

$$P(e^{x|S|} > e^{tx}) \leq P(e^{xS} > e^{tx}) + P(e^{-xS} > e^{tx}) \leq 2e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right)$$

2d On suppose $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$P(|S| > t) \leq 2 \exp \left(\frac{-t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Soient $x, t \in \mathbb{R}^+$. On a $(|S| > t) = (e^{x|S|} > e^{tx})$ donc :

$$P(|S| > t) \leq 2e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right) = 2 \exp \left(-tx + \frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

Posons $g_t(x) = \exp \left(-tx + \frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right)$ et étudions g_t sur $\mathbb{R}^+$, g_t est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$g'_t(x) = \left(-t + x \sum_{i=1}^n c_i^2 \right) g_t(x), \text{ du signe de } -t + x \sum_{i=1}^n c_i^2, \text{ donc } g_t(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

(dénominateur non nul car $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$).

Donc g_t admet un minimum en $x = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ qui vaut $g_t \left(\frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \right) = \exp \left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right) = \exp \left(\frac{-t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right)$. Donc pour cette valeur de x , 2c montre que :

$$P(|S| > t) \leq 2 \exp \left(\frac{-t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right)$$

Corrigé exercice ETOILE 2 : Soit ϕ une application continue strictement positive sur $[-1, 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire euclidien défini par $(P | Q) = \int_{-1}^1 \phi(t) P(t) Q(t) dt$ et on note $\|P\|$ la norme associée.

La question 4 est indépendante des questions 1, 2 et 3.

1 On admet presque qu'il s'agit en effet d'un produit scalaire : montrer seulement le caractère défini positif.

Le caractère positif ne pose pas de problème. Pour $(P | P) = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, utiliser successivement le théorème de l'intégrale nulle puis le fait qu'un polynôme nul sur $[a, b]$ admet une infinité de racines donc est le polynôme nul.

2a Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ tels que :

- (1) : $\forall k \in [0, n]$, $\deg(P_k) = k$
- (2) : $\forall (i, j) \in [0, n]^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i | P_j) = 0$.
- (3) : $\forall k \in [0, n]$, $\|P_k\| = 1$.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ obtenue vérifie les conditions 2 et 3 puisqu'elle est orthonormée et aussi pour tout $k \in [0, n]$, $\text{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$. Ainsi, $P_k \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$ donc $\deg(P_k) \leq k$. Mais si on avait $\deg(P_k) < k$, alors on aurait $\text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) \subset \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1})$. D'où $\deg(P_k) = k$.

2b Soit $k \in [1, n]$.

2bi Montrer que P_k a au moins une racine réelle dans $] -1, 1[$.

On a $(P_k | P_0) = 0$. Or le procédé d'orthonormalisation de Schmidt donne $P_0 = \frac{1}{\|1\|}$ (au signe près mais peu importe). En tout cas, P_0 est une constante λ non nulle. et $(P_k | P_0) = \int_{-1}^1 \lambda \phi(t) P(t) dt = 0$ donc $\int_{-1}^1 \phi(t) P(t) dt = 0$. Si P_k n'avait pas de racine réelle dans $] -1, 1[$, $\phi(t) P_k(t)$ serait de signe constant sur $[-1, 1]$, continue et d'intégrale nulle donc nulle sur $[-1, 1]$ d'après le théorème de l'intégrale nulle. Absurde car précisément $t \mapsto \phi(t) P_k(t)$ est supposée ne pas s'annuler sur $] -1, 1[$.

2bii Montrer que $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$.

Soit $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Alors $Q \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{k-1})$. Or $(P_k | P_i) = 0$ pour $i < k$ donc par linéarité à droite, $(P_k | Q) = 0$. Donc $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$.

2biii On appelle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_k dans $] -1, 1[$ en lesquelles P_k change de signe. En considérant le produit scalaire de P_k avec un polynôme bien choisi, montrer que $p = k$. Conclure sur la multiplicité des racines de P_k et le caractère scindé sur $\mathbb{R}$.

On a $\deg(P_k) = k$ donc $p \leq k$. Supposons $p < k$ et posons $Q = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_p)$. Alors $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc $(P_k | Q) = 0$. Or on a :

$$\begin{aligned} (P_k | Q) &= \int_{-1}^1 \phi(t) P_k(t) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \phi(t) (t - \alpha_1)^2 (t - \alpha_2)^2 \cdots (t - \alpha_p)^2 \widetilde{P}_k(t) dt \end{aligned}$$

car $P_k = \widetilde{P}_k (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_p)$ avec $\widetilde{P}_k$ un polynôme ne changeant pas de signe sur $[-1, 1]$.

On a donc une intégrale nulle d'une fonction continue et de signe constant donc d'après le théorème de l'intégrale nulle, cette fonction est nulle sur $[-1, 1]$ donc $\widetilde{P}_k$ s'annule en une infinité de points donc est le polynôme nul donc P_k aussi, absurde ! Donc $p = k$.

Ainsi, P_k est de degré k et a dans $[-1, 1]$ k racines distinctes donc ce sont toutes les racines de P_k , elles sont simples et P_k est scindé sur $\mathbb{R}$.

2c Montrer que pour tout $k \in [1, n - 1]$, le polynôme XP_k appartient au sous-espace $\text{Vect}(P_{k-1}, P_k, P_{k+1})$.

Soit $k \in [1, n - 1]$. On a $\deg(XP_k) = k + 1$ donc $XP_k \in \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1})$ et cette

base de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ est orthonormée donc il s'écrit $XP_k = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{k+1} P_{k+1}$ avec pour tout $i \leq k-2$:

$$\lambda_i = (XP_k | P_i) = \int_{-1}^1 \phi(t) t P_k(t) P_i(t) dt = (P_k | XP_i) = 0$$

car $XP_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$.

3 Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction constante égale à 1. Ainsi $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$.

3a Justifier qu'il existe des polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ uniques tels que :

- (1) : $\forall k \in [0, n]$, $\deg(L_k) = k$
- (2) : $\forall (i, j) \in [0, n]^2$, $i \neq j \Rightarrow (L_i | L_j) = 0$.
- (3) : $\forall k \in [0, n]$, $L_k(1) = 1$.

En posant $L_i = \frac{P_i}{P_i(1)}$ ($P_i(1) \neq 0$ car toutes les racines de P_i sont dans $] -1, 1[$, on a une famille de polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ qui vérifie les conditions (1), (2) et 3)).

Pour l'unicité, il faut remarquer (voir 2a) que la condition (1) est équivalente à $\forall k \in [0, n]$, $Vect(1, X, \dots, X^k) = Vect(L_0, L_1, \dots, L_k)$ donc les polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ sont nécessairement à coefficient multiplicatif près ceux obtenus par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, c'est-à-dire $P_0, P_1, \dots, P_n$. Et la condition (3) fixe une unique valeur possible pour ces constantes multiplicatives, à savoir $\frac{1}{P_i(1)}$.

3b Montrer que pour $k \in [0, n]$ fixé, il existe Q_k unique vérifiant les 3 conditions :

$$\deg(Q_k) = 2k, \quad (X-1)^k \text{ divise } Q_k, \quad L_k = Q_k^{(k)} \text{ (dérivée } k\text{-ième)}$$

Soit $k \in [0, n]$. On peut écrire L_k dans la base $\left((X-1)^i\right)_{i=0, \dots, k}$ de $\mathbb{R}_k[X]$ (c'est aussi la formule de Taylor pour les polynômes) :

$$L_k = a_0 + a_1(X-1) + \dots + a_k(X-1)^k$$

et chercher Q_k dans la base $\left((X-1)^i\right)_{i=0, \dots, 2k}$ de $\mathbb{R}_{2k}[X]$:

$$Q_k = b_0 + b_1(X-1) + \dots + b_{2k}(X-1)^{2k}$$

La condition $L_k = Q_k^{(k)}$ fixe de manière unique les valeurs des coefficients $b_{k+1}, \dots, b_{2k}$ (on peut expliciter facilement), tandis que la condition $(X-1)^k$ divise Q_k revient à $b_0 = b_1 = \dots = b_k = 0$.

Enfin, $\deg(L_k) = k$ et $L_k = Q_k^{(k)}$ donne nécessairement $\deg(Q_k) = 2k$.

3c En utilisant les questions précédentes, montrer que $(X+1)^n$ divise Q_n . Indication : justifier que pour tout $k \in [0, n-1]$, $(L_n | X^k) = 0$ et commencer par examiner ce que donne $k=0$ puis $k=1$. L_n est colinéaire à P_n et $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ donc pour tout $k \in [0, n-1]$, $(L_n | X^k) = 0$.

- $(L_n | 1) = 0$ donc $\int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(t) dt = 0$ donc $Q_n^{(n-1)}(-1) = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$ car $(X-1)^n$ divise Q_n .

- $(L_n \mid X) = 0$ donc $\int_{-1}^1 t Q_n^{(n)}(t) dt = 0$ donc (IPP), $\left[t Q_n^{(n-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_n^{(n-1)}(t) dt = 0$ donc $\int_{-1}^1 Q_n^{(n-1)}(t) dt = 0$ donc $Q_n^{(n-2)}(-1) = Q_n^{(n-2)}(1) = 0$ car $(X-1)^n$ divise Q_n .
- supposons pour $s \in [1, n-1]$ avoir prouvé $Q_n^{(j)}(-1) = 0$ pour tout $j \in [s, n-1]$.
Or $(L_n \mid X^{n-s}) = 0$ donc $\int_{-1}^1 t^{n-s} Q_n^{(n)}(t) dt = 0$. Des IPP successives (à détailler !!) et les hypothèses de récurrence forte conduisent à $Q_n^{(s-1)}(-1) = Q_n^{(s-1)}(1) = 0$ car $(X-1)^n$ divise Q_n .
- Ainsi, par récurrence descendante forte, on obtient $Q_n(-1) = Q'_n(-1) = \dots = Q_n^{(n-1)}(-1) = 0$ ce qui montre que $(X+1)^n$ divise Q_n .

3d En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \mu (X^2 - 1)^n$ puis montrer que $\mu = \frac{1}{2^n n!}$.

Ainsi, $(X+1)^n (X-1)^n$ divise Q_n et $\deg(Q_n) = 2n$ donc il existe μ tel que $Q_n = \mu (X^2 - 1)^n$.
Or $L_n = Q_n^{(n)}$ donc par la formule de Leibniz :

$$L_n = \mu \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X-1)^n)^{(k)} ((X+1)^n)^{(n-k)}$$

D'autre part, $L_n(1) = 1$ et $((X-1)^n)^{(k)}(1) = 0$ sauf si $k = n$ donc :

$$1 = \mu \binom{n}{n} ((X-1)^n)^{(n)}(1) ((X+1)^n)^{(0)}(1) = \mu n! 2^n$$

donc $\mu = \frac{1}{2^n n!}$.

Ainsi, $L_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ (formule de Rodrigues).

4 Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction $\phi(t) = \sqrt{1-t^2}$. On admettra que $(P \mid Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P(t) Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'on n'aura pas à utiliser les questions 2 et 3 dans cette question.

4a Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin((n+1)x) = \sin(x) Q_n(\cos(x))$$

Indication : prouver séparément l'existence et l'unicité, et pour l'existence, passer par les nombres complexes.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin((n+1)x) &= \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^{n+1}) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sin^k(x) \cos^{n+1-k}(x) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sin^k(x) \cos^{n+1-k}(x) \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} (-1)^l \sin^{2l+1}(x) \cos^{n-2l}(x) \\ &= \sin(x) \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} (-1)^l (1 - \cos^2(x))^l \cos^{n-2l}(x) = \sin(x) Q_n(\cos(x)) \end{aligned}$$

en posant $Q_n(X) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} (-1)^l (1-X^2)^l X^{n-2l}$. D'où l'existence.

L'unicité résulte de ce que si R_n vérifie aussi $\forall x \in \mathbb{R}, \sin((n+1)x) = \sin(x) R_n(\cos(x))$ alors dès que $\sin(x) \neq 0$, $R_n(\cos(x)) = Q_n(\cos(x))$ donc $Q_n - R_n$ admet une infinité de racines donc est nul donc $R_n = Q_n$.

4b Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n .

Puisque $\deg((1-X^2)^l X^{n-2l}) = n$, on a $\deg(Q_n) \leq n$ et le coefficient de X^n est

$$\sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} (-1)^l (-1)^l = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} > 0$$

donc $\deg(Q_n) = n$.

En développant par le binôme de Newton $(1+1)^{n+1}$ et $(1-1)^{n+1}$, et en séparant les indices pairs et les indices impairs, on obtient (à détailler) :

$$c(Q_n) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l} = \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$$

4c Montrer que les Q_k sont deux à deux orthogonaux.

Soient i, j des entiers distincts, alors

$$(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} Q_i(t) Q_j(t) dt$$

on pose $t = \cos(u)$, $dt = -\sin(u) du$ et on a :

$$\begin{aligned} (Q_i | Q_j) &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2(u)} Q_i(\cos(u)) Q_j(\cos(u)) (-\sin(u)) du \\ &= \int_0^{\pi} \sin(u) Q_i(\cos(u)) \sin(u) Q_j(\cos(u)) du = \int_0^{\pi} \sin((i+1)u) \sin((j+1)u) du \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^{\pi} (\cos((i+j+2)u) - \cos((i-j)u)) du = \dots = 0 \text{ (car } i \neq j). \end{aligned}$$

Le même calcul avec $i = j = n$ donne $\|Q_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4d On considère l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = \int_{-1}^1 (t^3 - xt^2 - yt - z)^2 \sqrt{1-t^2} dt$.

Montrer que g admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint. Calculer ce minimum (on pourra admettre $(X^3 | X) = \frac{\pi}{16}$ et $\|X^3\|^2 = \frac{5\pi}{128}$ et $\|X\|^2 = \frac{\pi}{8}$ en indiquant comment faire ces calculs).

Posons $P = xX^2 + yX + z$. Alors $g(x, y, z) = \int_{-1}^1 (t^3 - xt^2 - yt - z)^2 \sqrt{1-t^2} dt = \|X^3 - P\|^2$ et lorsque x, y, z parcourent $\mathbb{R}^3$, P parcourt $\mathbb{R}_2[X]$. Donc g admet un minimum car c'est le carré de la distance de X^3 au sev de dimension finie $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que cette distance est un minimum et qu'il est atteint en un point unique qui est le projeté orthogonal $p(X^3)$ de X^3

sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Enfin, (Q_0, Q_1, Q_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ donc :

$$p(X^3) = \frac{(X^3 | Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0 + \frac{(X^3 | Q_1)}{\|Q_1\|^2} Q_1 + \frac{(X^3 | Q_2)}{\|Q_2\|^2} Q_2$$

On peut calculer $Q_0 = 1$, $Q_1 = 2X$ et $Q_2 = 4X^2 - 1$ d'où

$$p(X^3) = \frac{2}{\pi} ((X^3 | 1) + 4(X^3 | X)X + (X^3 | 4X^2 - 1)(4X^2 - 1))$$

Ensuite, on a $(X^n | X^p) = \int_{-1}^1 t^{n+p} \sqrt{1+t^2} dt = 0$ si $n+p$ est impair car la fonction sous l'intégrale est alors impaire.

Enfin, $(X^3 | X) = \int_0^\pi \cos^4(u) \sin^2(u) du$ et après linéarisation, on trouve $\cos^4(u) \sin^2(u) = \frac{1}{32} (2 + \cos(2u) - 2\cos(4u) - \cos(6u))$ puis $(X^3 | X) = \frac{\pi}{16}$ et finalement, $p(X^3) = \frac{X}{2}$.

D'après le cours, le minimum de g vaut alors :

$$\begin{aligned} \|X^3 - p(X^3)\|^2 &= \|X^3\|^2 + \left\| \frac{X}{2} \right\|^2 - 2 \left(X^3 | \frac{X}{2} \right) \\ &= \frac{5\pi}{128} + \frac{1}{4} \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{128} \end{aligned}$$

les calculs non explicités se font encore par linéarisation.