

D.M.1 pour le 25 Septembre 2025

Exercice 1 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} : |\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$

Exercice 2 : Soit F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (1) : f est dérivable au point 1
- (2) : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, f(xy) = f(x)f(y)$

Soit f un élément quelconque de F .

1 Montrer que $f(1) = 1$.

2 Soit x_0 un réel strictement positif et h un réel tel que $x_0 + h \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0) \left[f\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) - f(1) \right]$$

3 Quelle est la limite, quand h tend vers 0 de $\frac{f\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) - f(1)}{\frac{h}{x_0}}$?

4 Dédurre de ce qui précède que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^{+*}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$$

5 Que se passe-t-il pour f si l'on a $f'(1) = 0$?

6 Trouver une primitive du membre de gauche et une primitive du membre de droite de l'égalité du 4.

7 Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

Exercice 3 : On définit pour des entiers q et n non nuls,

$$u_{q,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{q+k-1}{k} \quad \text{et} \quad w_{q,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{q+n-1}{k}$$

1 Rappeler la formule du triangle de Pascal avec les hypothèses ainsi que sa démonstration.

Dans la suite, on considérera que cette relation est encore vraie pour $p = 0$ en convenant que

$$\binom{n-1}{-1} = 0.$$

2 Montrer que si $q > 1$ et $n > 1$,

$$u_{q,n} = u_{q-1,n} + \frac{1}{2} u_{q,n-1}.$$

3 Montrer que si $q > 1$ et $n > 1$,

$$w_{q,n} = w_{q-1,n} + \frac{1}{2}w_{q,n-1}.$$

4a Pour $n \geq 1$, calculer $w_{1,n}$ et $u_{1,n}$. Vérifier que $w_{1,n} = u_{1,n}$.

4b Pour $q \geq 1$, comparer $u_{q,1}$ et $w_{q,1}$.

5 Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{q+k-1}{k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{q+n-1}{k}$$

Indication: raisonner par récurrence sur l'entier $p \geq 2$ pour montrer la propriété:

$$\forall q \geq 1, \forall n \geq 1, \text{ tels que } q+n=p, \quad u_{q,n} = w_{q,n}.$$

Attention : dans l'hérédité, on n'oubliera pas les cas particuliers pour certaines valeurs de q et n .