Programme de colles, semaines 11 et 12

Chapitre 9 : Logique, ensembles, applications. - Table de vérité de l'implication; négation de l'implication.

- Exprimer que (u_n) n'est pas croissante (par une proposition logique quantifiée).
- Définition d'une fonction indicatrice. Donner une relation entre $1_{A\cup B}, 1_{A\cap B}, 1_A$ et 1_B.
- Compléter et montrer pour A, B des parties de X : $X \setminus (A \cap B) =$
- Montrer $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$.
- Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Image directe de $A \cup B$, donner la formule (précisez ce que sont A et B) et démontrer.
- Définition de l'image réciproque. Image réciproque de $A \cap B$, donner la formule (précisez ce que sont A et B) et démontrer.

Chapitre 9 : Fonctions à valeurs réelles, limites, continuité. - Toute définition de limite d'une fonction (finie ou infinie, en a ou en l'infini).

- Montrer que $\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- Idem pour $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
- Enoncé de la forme générale du théorème des valeurs intermédiaires et de son corollaire.
- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
- Enoncé du théorème des bornes atteintes.
- Enoncé du théorème de la bijection continue strictement montone.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ est bornée.

Chapitre 10 : Dérivation - Etudier la dérivabilité en 0 de $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

- dérivable $\Longrightarrow$ continue (avec démonstration).
- formule de Leibniz: énoncé (avec hypothèses!)
- dérivée n_ième de $f(x) = (x^2 + x + 1)\, e^{3x}$.
- g n fois dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I, montrer que $1/g$ est n fois dérivable sur I.
- Enoncé du théorème de Rolle.
- Egalité des accroissements finis (énoncé et démonstration à partir du théorème de Rolle).
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$
- Enoncé de l'inégalité des accroissements finis + exercice :majorer l'erreur dans l'approximation 100 pour $\sqrt{10001}$.
- Exercice : f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $\Longrightarrow$ f lipschitzienne sur ce segment.
- $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$,dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$. Préciser les inclusions entre $\mathcal{C}^\infty(I), \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $\mathcal{C}^n(I)$ et justifiez-les.
- Enoncé du théorème de la limite de la dérivée + exercice $f(x) = \cosh(\sqrt{x})$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.