

# Programme de colles, semaines 13 et 14

**Chapitre 10 : Dérisation** - Etudier la dérivabilité en 0 de  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ .

- dérivable  $\implies$  continue (avec démonstration).
- formule de Leibniz: énoncé (avec hypothèses!)
- dérivée  $n$  ième de  $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{3x}$ .
- $g$   $n$  fois dérivable sur  $I$  et ne s'annulant pas sur  $I$ , montrer que  $1/g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ .
- Enoncé du théorème de Rolle.
- Egalité des accroissements finis (énoncé et démonstration à partir du théorème de Rolle).
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$
- Enoncé de l'inégalité des accroissements finis + exercice : majorer l'erreur dans l'approximation 100 pour  $\sqrt{10001}$ .
  - Exercice :  $f$  de classe  $C^1$  sur un segment  $\implies f$  lipschitzienne sur ce segment.
  - $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $f(0) = 0$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - définition des fonctions de classe  $C^1$ ,  $C^n$ ,  $C^\infty$ . Préciser les inclusions entre  $C^\infty(I)$ ,  $C^{n+1}(I)$  et  $C^n(I)$  et justifiez-les.
  - Enoncé du théorème de la limite de la dérivée + exercice  $f(x) = \cosh(\sqrt{x})$ , montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur un intervalle  $I$  et s'annulant au moins  $(n+1)$  fois sur  $I$ . Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule.
    - Calculer la dérivée  $n$  ième de  $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ . En déduire que  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
    - Soit  $(E) : y'' + a(x)y = b(x)$  avec  $a, b$  de classe  $C^\infty$  sur  $I$ . Montrer que toute solution de  $(E)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ .
    - Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable vérifiant  $g(0) = 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]0, 1[$  vérifiant  $2g(c)g'(c)g(1-c) = g^2(c)g'(1-c)$ .
    - Montrer que pour tout réel  $x \in [0, 1[$ ,  $x \leq \arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
    - Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 \leq a \leq b$ ,  $\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan(b) - \arctan(a) \leq \frac{b-a}{1+a^2}$
    - Fonctions convexes : définition, caractérisation par les pentes, position par rapport aux tangentes (énoncés seulement)

**Attention :** l'inégalité de Jensen n'est pas au programme, elle doit être donnée si elle soit être utilisée.

- Exercice : soit  $f : [A, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  convexe et majorée. Montrer que  $f$  est décroissante sur  $[A, +\infty[$ .
- Montrer que:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

- Exercice : soient  $a, b, x, y > 0$ . Montrer:

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \left( \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \right).$$

## Chapitre 12 : polynômes : ATTENTION, le chapitre n'a pas été traité en intégralité

!! La construction rigoureuse des polynômes n'a pas été traitée.

- degré de la somme de deux polynômes: énoncé détaillé et preuve.
- produit de deux polynômes: expression du coefficient général.
- énoncé de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$ .
- Formule de Taylor : énoncé
- définition de la multiplicité des racines et théorème de caractérisation de la multiplicité des racines: énoncé seulement (mais exact et précis!!).
- Exercice : soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ .  $P$  admet-il une racine multiple?
- Vu en TD : idem pour  $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$  (en admettant la décompo de  $X^n - 1$ ), en déduire  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .
- énoncé seulement: décomposition en irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$
- énoncé seulement: décomposition en irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$
- Exercice : Soient  $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ . Montrer que  $(X^2 + X + 1)$  divise  $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .