

Programme de colles, semaines 13 et 14

Chapitre 10 : Dérivation - Etudier la dérivabilité en 0 de $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

- dérivable \implies continue (avec démonstration).
- formule de Leibniz: énoncé (avec hypothèses!)
- dérivée n -ième de $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.
- g n fois dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I , montrer que $1/g$ est n fois dérivable sur I .
- Énoncé du théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis (énoncé et démonstration à partir du théorème de Rolle).
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$
- Énoncé de l'inégalité des accroissements finis + exercice : majorer l'erreur dans l'approximation 100 pour $\sqrt{10001}$.
- Exercice : f de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $\implies f$ lipschitzienne sur ce segment.
- $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(0) = 0$, dérivable sur \mathbb{R} mais pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- définition des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^n , \mathcal{C}^∞ . Préciser les inclusions entre $\mathcal{C}^\infty(I)$, $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $\mathcal{C}^n(I)$ et justifiez-les.
- Énoncé du théorème de la limite de la dérivée + exercice $f(x) = \cosh(\sqrt{x})$, montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I et s'annulant au moins $(n+1)$ fois sur I . Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
- Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
- Soit $(E) : y'' + a(x)y = b(x)$ avec a, b de classe \mathcal{C}^∞ sur I . Montrer que toute solution de (E) est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
- Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $g(0) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ vérifiant $2g(c)g'(c)g(1-c) = g^2(c)g'(1-c)$.
- Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1[$, $x \leq \arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq a \leq b$, $\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan(b) - \arctan(a) \leq \frac{b-a}{1+a^2}$
- Fonctions convexes : définition, caractérisation par les pentes, position par rapport aux tangentes (énoncés seulement)

Attention : l'inégalité de Jensen n'est pas au programme, elle doit être donnée si elle doit être utilisée.

- Exercice : soit $f : [A, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est décroissante sur $[A, +\infty[$.
- Montrer que:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

- Exercice : soient $a, b, x, y > 0$. Montrer:

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \left(\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \right).$$

Chapitre 12 : polynômes : ATTENTION, le chapitre n'a pas été traité en intégralité

!! La construction rigoureuse des polynômes n'a pas été traitée.

- degré de la somme de deux polynômes: énoncé détaillé et preuve.

- produit de deux polynômes: expression du coefficient général.

- énoncé de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

- Formule de Taylor : énoncé

- définition de la multiplicité des racines et théorème de caractérisation de la multiplicité des racines: énoncé seulement (mais exact et précis!!).

- Exercice : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$. P admet-il une racine multiple?

- Vu en TD : idem pour $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ (en admettant la décompo de $X^n - 1$), en déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

- énoncé seulement: décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

- énoncé seulement: décomposition en irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

- Exercice : Soient $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $(X^2 + X + 1)$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.