Programme de colles, semaines 15 et 16

Chapitre 12 : polynômes : La construction rigoureuse des polynômes n'a pas été traitée.

- degré de la somme de deux polynômes: énoncé détaillé et preuve.
- produit de deux polynômes: expression du coefficient général.
- énoncé de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Formule de Taylor : énoncé
- définition de la multiplicité des racines et théorème de caractérisation de la multiplicité des racines: énoncé seulement (mais exact et précis!!).
- Exercice : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$. P admet-il une racine multiple?
- Vu en TD : idem pour $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ (en admettant la décompo de $X^n - 1$), en déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
- <u>enoncé seulement:</u> décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$
- <u>enoncé seulement:</u> décomposition en irréductible dans $\mathbb{R}[X]$
- Exercice : Soient $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $(X^2 + X + 1)$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- Exercice**:** Soit $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp(-x^2) \end{array}$

  Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

  Calculer $f^{(k)}$ pour $k = 1, 2, 3$.

  Montrer que pour tout entier n il existe un polynôme P_n vérifiant $f^{(n)}(x) = P_n(x) \exp(-x^2)$.

  Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
- relations coefficients-racines : somme et produit des racines.
- factorisation complète de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$.
- factorisation complète de $X^6 + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.
- Exercice : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
- Exercice : Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(X + 1) = P(X)$.
- Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(X) = \dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$.
- Tout polynôme de degré 3 à coefficients réels admet au moins une racine réelle : donner deux démonstrations.

Chapitre 13 : Analyse asymptotique (attention je finis le chapitre seulement le lundi 19) - définition de négligeable, dominée et équivalent en $a \in \mathbb{R}$ pour les fonctions.

- limite de $f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ (avec des équivalents).
- déterminer la limite quand x tend vers 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, (avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$).
- équivalent en 0 de $x^x - 1$.
- équivalent en 0 de $(1 + x)^\alpha - 1$, énoncé du théorème donnant ce résultat.
- Donner un contre-exemple pour montrer qu'on ne peut pas additionner des équivalents.

Développements limités - Formule de Taylor-Young: énoncé +application à $e^x, \sinh, \cosh, \sin, \cos$, et à $(1 + x)^\alpha$.

- Calcul de : $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{1}{1-x}-e^x,0\right)$; $\mathrm{DL}_4\left(\sin(x)\left(1-\cos(x)\right),0\right)$; $\mathrm{DL}_6\left(\dfrac{1}{2+x^3+x^5},0\right)$; $\mathrm{DL}_4\left(\dfrac{1}{\cos(x)},0\right)$.
- DL à tout ordre en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$.
- relation entre dérivabilité de f et D.L. à l'ordre 1 (remarques après Taylor-Young).
- DL à tout ordre en 0 de $\ln(1+x)$ (à connaître). Démonstration.
- DL à l'ordre 7 en 0 de $\arctan(x)$ (à calculer).
- $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$, position de la courbe par rapport à la tangente en 0?
- $\mathrm{DL}_3\left(e^{\sin(x)},0\right)$;
- Déterminer le DL à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$ de $\cos(x)$
- Etude locale en 0 de $f(x)=x\dfrac{\cosh(x)}{\sin(x)}$.
- Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $f(x)=\ln\left(x^2+2x+2\right)$. Qu'en déduit-on?
- Faites l'étude quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)=\sqrt{x(3x+6)}$.