Programme de colles, semaines 17 et 18

Chapitre 11 : Matrices et systèmes linéaires :

- Produit d'une matrice par un vecteur colonne, produit de deux matrices, formule générale et application à des exemples particuliers.
- $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T =?$ avec démonstration.
- Donner 3 propriétés naturelles qui NE SONT PAS vérifiées par le produit des matrices, avec les contre-exemples associés.
- Calcul du produit de deux matrices élémentaires : $E_{i,j}E_{k,l} =?$
- Soit $A = . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Produit de deux matrices triangulaires supérieures (avec dém.)
- Binome de Newton et égalité de Bernouilli avec conditions d'applications.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Conditions d'existence et formules pour l'inverse d'un produit, et pour l'inverse d'une transposée.
- relation entre solutions d'un système linéaire et du systéme linéaire homogène associé.
- définition des matrices de transposition, de dilatation et de transvection et interprétation en tant qu'opération sur les lignes d'une matrice (démonstration partielle de quelques points, le tout serait trop long).
- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution d'un sytème linéaire.
- A pratiquer sur :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcul de A^n pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (vu en TD en dernière question de l'exo avec les suites u_n, v_n, w_n).

Chapitre 14 : Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ applications linéaires et matrices canoniquement associées Questions de cours :

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:

- définitions propres!! d'une base, d'une famille libre, d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, du terme combinaison linéaire.
- Démonstration de ce que les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ forment bien une base de $\mathbb{R}^n$.
- base$\Leftrightarrow$libre et génératrice :démonstration.
- Démonstration de ce qu'un plan vectoriel (ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires) est un sev de $\mathbb{R}^n$.

- Définition de $Vect\left(X\right)$, et montrer que c'est un sev de E.

- Exercice : Dans $\mathbb{R}^4$, soit $V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = 0\right\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de V.

Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$:

- f linéaire, montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des sev de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

- Condition nécessaire et suffisante d'injectivité et de surjectivité d'une application linéaire (énoncé en termes de noyau ou d'image, sans démonstration)

- Enoncé du lien entre application linéaire et matrice canoniquement associée:

Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est canoniquement associée à une matrice de taille* (n,p) *dont les colonnes sont dans l'ordre les coordonnées dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *des images par* f *des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^p$,

c'est-à-dire que si $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ *sont les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^p$, *alors ceci se résume dans l'écriture:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_p}) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f\left((x,y,z)\right) = (x, z, y+z, x+y)$.

1.a.) Justifier que f est linéaire.

1.b.) Décrivez deux méthodes permettant de donner la matrice canoniquement associée à f.

- Exercice: Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Montrer que $f \circ f = f$, déterminer $\ker(A)$ et $\ker(A - I_3)$.

- Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un linéaire et bijective, montrer que f^{-1} est linéaire.