Programme de colles, semaines 19 et 20

Chapitre 15 : espaces vectoriels, dimension - $Vect\,(X)$, est le plus petit sev de E contenant X : preuve.

Sommes de sev, sommes directes, supplémentaires

- Si V et W sont des sev de E, définition de $V+W$ et preuve que c'est un sev de E.
- Sous-espaces vectoriels en somme directe.
- Définition et caractérisation des supplémentaires (avec démonstration). Enoncé (sans dém.) des deux théorèmes liant supplémentaires et bases obtenues comme réunions de bases des deux supplémentaires.
- Enoncés : théorème de la base incomplète, de la base extraite, et (en dimension finie), cardinal des familles libres, des familles génératrices, et caractérisation des bases parmi ces familles (condition sur le cardinal).
- E de dimension finie, F sev de E et $\dim(F) = \dim(E)$, montrer que $F = E$.
- $\dim(F+G)$ et théorème de caractérisation des supplémentaires par l'intersection et la dimension: énoncé et dém. du théorème (pas la dém de la formule donnant $\dim(F+G)$).
- Exercice : soient $F = \left\{ f \in \mathcal{C}\left([-1,1], \mathbb{C}\right) \ / \ \int_{-1}^{1} f = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathcal{C}\left([-1,1], \mathbb{C}\right) \ / \ f \text{ constante} \right\}$. Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathcal{C}\left([-1,1], \mathbb{C}\right)$.
- Exercice : Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$, $a \neq b$. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus 4 et admettant a et b comme racines est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_4[X]$. En trouver une base.
- Exercice : Montrer que F défini dans $\mathbb{R}^p$ par l'équation $x_1 + \cdots + x_p = 0$ et $G = Vect\,(\vec{u})$ où $\vec{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ sont des sev suppélmentaires de $\mathbb{R}^p$.
- Exercice : On pose $f_n : x \to e^{nx}$. Montrer que $(f_0, f_1, \ldots f_n)$ est libre dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés est libre : preuve. Définir "base de $\mathbb{K}_n[X]$ de polynômes de degrés échelonnés"
- Base et dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec démonstration.
- Base et dimension de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, avec démonstration.
- Dimension du sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Les sous-ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (dém.).
- Exercice : Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $Tr : E \to \mathbb{R}$ définie pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $Tr\,(M) = a + d$. Montrer que Tr est une forme linéaire sur E. Montrer que $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a + d = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base et la dimension.