Programme de colles, semaines 21 et 22

Chapitre 16 : Applications linéaires :

Attention **:le rang des familles de vecteurs, des matrices et les déterminants ne sont pas encore au programme.**

- Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$. Montrer que f est linéaire puis que $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}$
- Condition nécessaire et suffisante d'injectivité et de surjectivité d'une application linéaire (énoncé en termes de noyau ou d'image, sans démonstration)
- $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ linéaires, montrer $g \circ f = 0$ ssi $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$
- Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont linéaires, montrer que $g \circ f$ est linéaire.
- Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ sont linéaires et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrer que $\alpha f + \beta g$ est linéaire.
- Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, montrer que f^{-1} est un isomorphisme.
- Enoncé complet du théorème : étant donnés $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n})$ une base de E et $(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_n})$ dans F, il existe une unique application linéaire envoyant $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{v_i}$, de plus, caractérisations de $\mathrm{Im}(f)$, de f injective, de f surjective et de f isomorphisme en termes de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_n})$.

En dimension finie : - Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

- Application à $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = (X+1)P - P'$, linéarité, matrices dans les bases canoniques. Idem pour $P \longmapsto P'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Projecteurs et symétries :

- Tout ou partie de ce qui suit:

$E = F \oplus G$, donner la définition de la projection sur F parallèlement à G et la définition de la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Que valent: p_F^2, p_G^2, $p_F \circ p_G$, $p_G \circ p_F$, $p_F + p_G$?

Que valent $\ker(p_F)$ et $\mathrm{Im}(p_F)$ (avec démonstration pour ces deux points)

Retrouver F et G à l'aide de noyaux d'applications faisant intervenir s_F (avec dém.)

Donner les deux relations reliant p_F, s_F et Id_E.

- $E = F \oplus G$, soit s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Justifier que s_F est linéaire et montrer que $s_F^2 = Id_E$.
- $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$, montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires et que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
- Exercice : Montrer qu'étant donné un projecteur ou une symétrie en dimension finie, il existe une base dans-laquelle sa matrice est diagonale

Rang des applications linéaires :

- formule du rang (énoncé et schéma de la démonstration, c'est à dire les étapes de la démonstration, sans les détails, il faut donc passer par le lemme qui précède le théorème).
- Enoncé et démonstration du théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie :si $\dim(E) = \dim(F)$, et f linéaire de E dans F, alors f injective ssi f surjective ssi f surjective.
- $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $b_0, \ldots b_n \in \mathbb{K}$, montrer en utilisant une application linéaire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i, $P(a_i) = b_i$.
- Exercice vu dans le chapitre: Montrer en introduisant un isomorphisme, pourquoi l'équation $y' + ay = Q(x)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et Q polynôme de degré au plus n admet une et une seule solution polynômiale de degré au plus n.
- f linéaire de E dans F, montrer que $rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

- f linéaire de E dans F. Montrer que $rg(f) = \dim(E)$ ssi f injective et $rg(f) = \dim(F)$ ssi f surjective.

- Exercice vu en TD : Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

a.) Montrer qu'il existe deux homothéties vectorielles vérifiant cette relation.

b.) Montrer que f est un automorphisme de E.

- Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$, $f \neq 0$ avec $\dim(E) = 3$. Déterminer $rg(f)$.

Changements de bases :

- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: en donner deux descriptions (l'une en termes de vecteurs l'autre en termes d'application linéaire).

- Formules de changement de base: énoncé précis pour les vecteurs et pour les matrices.

- Exercice : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que M est canoniquement associée à une symétrie. Donner une matrice P telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$