# Programme de colles, semaines 23 et 24

**Chapitre 16 : Applications linéaires :**

**Rang des applications linéaires :**

- formule du rang (énoncé et schéma de la démonstration, c'est à dire les étapes de la démonstration, sans les détails, il faut donc passer par le lemme qui précède le théorème).

- Enoncé et démonstration du théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie :si $\dim(E) = \dim(F)$, et $f$ linéaire de $E$ dans $F$, alors $f$ injective ssi $f$ surjective ssi $f$ surjective.

- $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $b_0, \ldots b_n \in \mathbb{K}$ , montrer en utilisant une application linéaire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout $i$, $P(a_i) = b_i$.

- Exercice vu dans le chapitre: Montrer en introduisant un isomorphisme, pourquoi l'équation $y' + ay = Q(x)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $Q$ polynôme de degré au plus $n$ admet une et une seule solution polynômiale de degré au plus $n$.

- $f$ linéaire de $E$ dans $F$, montrer que $rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

- $f$ linéaire de $E$ dans $F$. Montrer que $rg(f) = \dim(E)$ ssi $f$ injective et $rg(f) = \dim(F)$ ssi $f$ surjective.

- Exercice vu en TD : Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$.

a.) Montrer qu'il existe deux homothéties vectorielles vérifiant cette relation.

b.) Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$.

- Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$, $f \neq 0$ avec $\dim(E) = 3$. Déterminer $rg(f)$.

**Changements de bases :**

- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ : en donner deux descriptions (l'une en termes de vecteurs l'autre en termes d'application linéaire).

- Formules de changement de base: énoncé précis pour les vecteurs et pour les matrices.

- Exercice : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que $M$ est canoniquement associée à une symétrie. Donner une matrice $P$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Rang des familles de vecteurs, rang des matrices** - $A$ carrée alors $A$ inversible ssi $rg(A) = n$.avec démonstration.

- Montrer que:

$(i)$ $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) \leq p$

$(ii)$ $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) = p$ si et seulement si $(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p})$ est libre.

Si $E$ est de dimension finie, alors:

$(iii)$ $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) \leq \dim(E)$

$(iv)$ $rg(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p}) = \dim(E)$ si et seulement si $(\overrightarrow{v_1}, \ldots \overrightarrow{v_p})$ est génératrice dans $E$.

- $\operatorname{Im}(AP) = \operatorname{Im}(A)$ si $P$ est inversible (démonstration). Méthode de calcul de $\operatorname{Im}(A)$ par opérations élémentaires sur les colonnes de $A$ (exposé de la méthode et justification que des colonnes échelonnées forment une famille libre).

- Exercice : Soit $E$ un espace vectoriel avec $\dim(E) = 3$ et $f$ un endomorphisme non nul de $E$ tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $rg(f) = 1$. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans-laquelle la matrice de $f$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Déterminants :** - énoncé du théorème admis sur les déterminants des familles de vecteurs.

- critère pour $(\overrightarrow{x_1}, \dots \overrightarrow{x_n})$ base.
- définition du dét d'un endomorphisme.
- Compléter : pour une famille de $n$ vecteurs dans un ev de dimension $n$, et un endomorphisme $f$ de cet ev, on a :

$$\det_{\mathcal{B}} \left( f\left(\overrightarrow{x_1}\right), \dots f\left(\overrightarrow{x_n}\right) \right) = ?$$

- Déterminant et bijectivité. Déterminant d'une composée. (énoncés). Propriétés correspondantes pour les matrices.
- Calcul d'un déterminant $(2,2)$ ou $(3,3)$.
- Action des opérations élémentaires sur un déterminant. (énoncés).
- Exercice : montrer que deux matrices semblables ont même déterminant. (on donnera deux justifications différentes). Etudier la réciproque.
- Développement du déterminant par rapport à une colonne ou une ligne : donnez la formule!
- Factorisation du déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.
- Exercice : calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
- Exercice : soient $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

- Exercice : pour des scalaires $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{K}$, on note $V(a_1, \dots a_n)$ et on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant de la matrice $W_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $m_{i,j} = a_i^{j-1}$ :

$$V(a_1, \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer que l'on a :

$$V(a_1, \dots a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Indication : on posera $f(x) = V(a_1, \dots a_{n-1}, x)$ et on montrera que $f$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ et de racines $a_1, \dots a_{n-1}$ (supposées deux à deux distinctes dans un premier temps)

- Exercice : calculer le déterminant suivant dit tridiagonal :$D_n = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

- Exercice : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Lorsqu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de $E$ et qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifient $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \lambda \overrightarrow{v}$, on dit que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de $f$, que $\lambda$ est une valeur propre de $f$ et que $\overrightarrow{v}$ et $\lambda$ sont associés.

Montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de $E$ est vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$ si et seulement si $\overrightarrow{v} \in \ker\left(f - \lambda Id\right)$.

En déduire que $\lambda$ est valeur propre de $f$ si et seulement si $\det\left(f - \lambda Id\right) = 0$.