

# Programme de colles, semaines 25 et 26

## Intégration :

- Si  $\mu$  désigne la valeur moyenne d'une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  (à valeurs réelles), montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \mu$ .

- Inégalité triangulaire sur les intégrales sous sa forme la plus générale ( $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ ), avec démonstration (dans le cas d'une fonction à valeurs réelles).

- Énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dém. de  $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

- définition de la somme de Riemann et théorème. Application à la limite de  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ .

- Calculer les primitives de  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ .

- Calculer  $\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x) dx$ .

- Application du changement de variables aux intégrales des fonctions paires, impaires et périodiques ( $\int_0^x = \int_{-x}^0, \dots$ ): énoncés et démonstration.

- Dérivabilité de  $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t) dt$  : énoncé + dém.

- Formule de Taylor-Lagrange : énoncé et application : montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$ .

- Calculer la limite quand  $x$  tend vers  $0^+$  de  $\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ .

- Soit  $h(t) = \frac{e^{t^2}}{t^2}$ . Montrer que  $h$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  et en déduire que pour tout  $x \geq 1$ :

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

- Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $[a, b]$ . Déterminer la limite de  $\int_a^b f(x) \sin(nx) dx$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

- Montrer que  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$  est bien définie sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Dérivabilité de  $f$  et calcul de  $f'$ . Calcul de la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .