D.M.9 pour le lundi 4 Mai 2026

Exercice 1 : Soit α un réel. On souhaite déterminer en fonction de α la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln(n)}$.

C'est un cas particulier de série de Bertrand.

On note f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^{\alpha}\ln(t)}$.

1 Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = 1$.

1a Calculer pour $x \geq 2$ l'intégrale $I(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

1b Déterminer la monotonie de f sur $[2,+\infty[$. En déduire que pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

1c En déduire pour tout entier $n \geq 2$ une inégalité entre $\sum_{k=2}^{n} f(k)$ et une intégrale à préciser, et conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha = 1$.

2 Dans cette question uniquement, on suppose $\alpha > 1$.

2a Déterminer un réel $\gamma > 1$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} f(n) = 0$$

2b En déduire avec soin qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$f(n) \leq \frac{1}{n^{\gamma}}$$

Conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha > 1$

3 Dans cette question uniquement, on suppose $\alpha < 1$.

3a Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f(n) \geq \frac{1}{n}$

3b En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha < 1$.

Exercice 2 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1 On prend **dans cette question uniquement** pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

1a Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme (remarquez que $n \geq 1$!!!).

1b Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer soigneusement que la série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in \left]-1, 1\right[$. (indication : utiliser une croissance comparée).

1c En remarquant que $x^n = (n+1)\, x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in \left]-1, 1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

1d Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que sa somme est égale à 2.

2 On prend **dans cette question uniquement** pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{1}{n \ln(n)}$ et $a_1 = 0$.

2a Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$.

2b A l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.

2c Calculer $\lim_{n \to +\infty} na_n$.

2d Montrer que $(n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n)$, en déduire un équivalent de b_n puis la nature de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$.

3 Ce résultat pourra servir dans les questions 4 et 5. Montrer que :

$$B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}.$$

4 On suppose **dans cette question uniquement** que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$.

4a Déterminer la limite de la suite (u_n).

4b En déduire que $\lim_{n \to +\infty} na_{2n} = 0$.

4c Montrer alors que $\lim_{n \to +\infty} na_n = 0$.

4d Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

4e A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5 On suppose **dans cette question uniquement** que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

5a Vérifier que pour tous entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

5b En déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

5c Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?