Chapitre 18 : Séries numériques de réels ou de complexes

Exercice 1 *Montrer que si $x \in]-1,1]$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et que :*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Corrigé : Soient un réel $x \in]-1,1]$ et un entier $n \geq 1$. on a $\sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$ donc il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \, dt &= \int_0^x \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} dt \\
\sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-t)^k \, dt &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \\
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x &= [\ln(1+t)]_0^x + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \\
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} &= \ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \\
\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} &= \ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

Il reste à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$ (en distinguant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$) et à conclure.

Exercice 2 *Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.*

1. *La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente?*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in [0,1]$ la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.*
3. *Justifier que la suite de terme général $\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x} dx$ converge vers 0*
4. *En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.*

Corrigé : 1 $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ donc la série $\sum |u_n|$ est la série harmonique donc divergente donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

2 Soit $x \in [0,1]$, alors $x \neq -1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \dfrac{1-(-x)^n}{1+x}$.

3 Pour tout $x \in [0,1]$, $1 \leq 1+x \leq 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$ et $\dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$ donc par intégration d'inégalités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx &\leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^n dx \\ \frac{1}{2(n+1)} &\leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

donc par théorème d'encadrement, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = 0$.

4 D'après 2 on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+x}$$

et en intégrant de 0 à 1 :Calculons

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

dpnc

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \ln(2) + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

En remarquant que $\int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \left[(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}\right]_0^1 = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ s'écrivent :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \ln(2) + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \to_{n\to+\infty} \ln(2)$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge et sa somme vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.

.1 Application aux séries complexes

Théorème 3 *Si (u_n) est une suite complexe, Si $u_n = O_{n\to+\infty}(v_n)$ et la série $\sum v_n$ est une série* ***à termes réels positifs*** *convergente, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente*

Exercice 4 *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

1. *Montrer que $z^n = o_{n\to+\infty}(n!)$*
2. *En déduire que la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge.*

Corrigé : 1 Posons $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$, alors (on suppose $z \neq 0$), $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|z|}{n+1} \to_{n\to+\infty} 0$ donc APCR n_0 on a : $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$.

Donc pour $n \geq n_0$, on obtient par récurrence : $|u_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$.

Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $z^n = o_{n\to+\infty}(n!)$.

2 $\dfrac{z^n}{n!} = o_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ car $\dfrac{\frac{z^n}{n!}}{1/2^n} = \dfrac{(2z)^n}{n!} \to_{n\to+\infty} 0$ d'après ci-dessus. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \dfrac{z^n}{n!} = o_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \\ \cdot\ \Sigma\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \text{ est une série géométrique convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma\frac{z^n}{n!} \text{ est une série absolument convergente donc convergente.}$$

Théorème 5 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

.1.1 Application aux séries de Riemann

Théorème 6 *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$

Démonstration : Posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Tout d'abord, si $\alpha \leq 0$, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
Supposons donc à présent $\alpha > 0$.
Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\alpha > 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

donc par intégration d'inégalités :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^\alpha}(k+1-k) &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k) \\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

On somme l'inégalité de droite de $k = 1$ à n et l'inégalité de gauche de $k = 1$ à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

et comme $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = S_n - 1$, il vient :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

1er cas : $\alpha \in]0, 1[$:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\, t^{\alpha-1}}\right]_1^{n+1} \leq S_n \leq 1 + \left[\frac{1}{(1-\alpha)\, t^{\alpha-1}}\right]_1^{n} = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

C'est l'inégalité de gauche qui permet de conclure car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) = +\infty$ donc par théorème de compraraison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Cependant, les deux inégalités peuvent être utilisées pour obtenir un équivalent des sommes partielles S_n, car on peut encadrer ainsi $\frac{S_n}{n^{1-\alpha}}$ entre deux quantités de même limite $\frac{1}{1-\alpha}$ (facile mais détaillez!), donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}$ donc $S_n =$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
2ème cas : $\alpha = 1$:

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$$

d'où l'on déduit encore que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et en détaillant encore, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \ln(n)$.
3ème cas : $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1-(n+1)^{1-\alpha}\right) = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\,t^{\alpha-1}}\right]_1^{n+1} \leq S_n \leq 1+\left[\frac{1}{(1-\alpha)\,t^{\alpha-1}}\right]_1^{n} = 1+\frac{1}{\alpha-1}\left(1-n^{1-\alpha}\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

c'est l'inégalité de droite qui est utile pour la convergence car elle montre que (S_n) est majorée.
Or $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$ donc (S_n) est croissante donc la suite (S_n) est convergente donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Les deux inégalités peuvent alors être utilisées pour obtenir un encadrement de la somme : tout admet une limite quand n tend vers $+\infty$ donc par passage à la limite, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Exercice 7 *Développement asymptotique de la somme partielle de la série* $\sum \ln(n)$.

Supplément : développement asymptotique de la somme partielle de la série $\sum \ln(n)$ **:**

Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$ *et fixons un entier* k *non nul. La fonction* $\ln$ *est croissante sur* $[k, k+1]$ *donc pour tout* $t \in [k, k+1]$, $\ln(k) \leq \ln(t) \leq \ln(k+1)$ *et par intégration d'inégalités :*

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\, dt \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\, dt \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1)\, dt$$

$$\begin{aligned} \ln(k)(k+1-k) &\leq \int_k^{k+1} \ln(t)\, dt \leq \ln(k+1)(k+1-k) \\ \ln(k) &\leq \int_k^{k+1} \ln(t)\, dt \leq \ln(k+1) \end{aligned}$$

On somme de $k = 1$ *à* n *les deux inégalités :*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

donc

$$\int_1^{n+1} \ln(t)\, dt - \ln(n+1) \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \ln(t)\, dt$$

Or $\int_1^{n+1} \ln(t)\, dt = [t\ln(t) - t]_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n$ *donc :*

$$(n+1)\ln(n+1) - n - \ln(n+1) \leq S_n \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$

donc :

$$n\ln(n+1) - n \leq S_n \leq n\ln(n+1) - n + \ln(n+1)$$

donc

$$0 \leq n(\ln(n+1) - \ln(n)) \leq S_n - n\ln(n) + n \leq n(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n+1)$$

donc

$$0 \leq \frac{S_n - nl\ln(n) + n}{n} \leq \ln(1 + 1/n) + \frac{\ln(n+1)}{n+1}\frac{n+1}{n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1 + 1/n) + \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\dfrac{n+1}{n} = 0$ *(avec une croissance comparée) donc par encadrement,* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n - n\ln(n) + n}{-n} = 0$ *donc* $S_n - n\ln(n) + n = o_{+\infty}(n)$ *donc*

$$S_n = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$$

Il s'agit d'aller plus loin. On pose $\alpha_n = S_n - n\ln(n) + n$ *et on calcule :*

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= S_{n+1} - (n+1)\ln(n+1) + n + 1 - S_n + n\ln(n) - n \\ &= \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln(n) + 1 \\ &= -n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 = 1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Mieux $\alpha_{n+1}-\alpha_n=\dfrac{1}{2n}+\beta_n$ *avec* $\beta_n=-\dfrac{1}{3n^2}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\sim_{+\infty}\dfrac{-1}{3n^2}$ *donc (à détailler)* $\Sigma\beta_n$ *est une série convergente. Faisons des sommes partielles :*

$$\begin{aligned}\alpha_n-\alpha_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k}+\beta_k\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k\end{aligned}$$

Notons $\beta=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\beta_k$, *ainsi* $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\beta_k=\beta+o_{+\infty}(1)$. *D'autre part, un exercice vu plus bas montre que :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \ln(n)+\gamma+o_{+\infty}(1)\\ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} &= \ln(n-1)+\gamma+o_{+\infty}(1)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \alpha_1+\frac{1}{2}\left(\ln(n-1)+\gamma+o_{+\infty}(1)\right)+\beta+o_{+\infty}(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(n)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\alpha_1+\gamma+\beta+o_{+\infty}(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(n)+\delta+o_{+\infty}(1)\end{aligned}$$

pour une certaine constante δ. *Ainsi :*

$$S_n=n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)+\delta+o_{+\infty}(1)$$

TD 17 : Séries numériques

Techniques de base, relations de comparaison,...

Exercice 8 *Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :*
$a : u_n = \dfrac{1+\ln(n)}{n^2}$ $b : u_n = \dfrac{2^n+5}{3^n-12}$ $c : u_n = n^{\ln(a)}$ $d : u_n = e^{-\sqrt{n}}$ $e : u_n = n^2\sin(1/n)$
$f : u_n = n\sin(1/n^2)$ $g : u_n = \left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ $h : u_n = 1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $i : u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
$j : u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ $k : u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $l : u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Corrigé : a $u_n = \dfrac{1+\ln(n)}{n^2} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $\dfrac{u_n}{1/n^{3/2}} = \dfrac{1+\ln(n)}{n^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} 0$ par croissance comparée donc :

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n^{3/2}} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n^{3/2}} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

b $u_n = \dfrac{2^n+5}{3^n-12} \sim_{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc :

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \sim_{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \text{ est une série géométrique convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

c $u_n = n^{\ln(a)} = \dfrac{1}{n^{-\ln(a)}}$, c'est une série de Riemann, elle converge si et seulement si $-\ln(a) > 1$, ie ssi $\ln(a) < -1$ ie ssi $a < \dfrac{1}{e}$.

d $u_n = e^{-\sqrt{n}} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\dfrac{u_n}{1/n^2} = \dfrac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = \dfrac{(\sqrt{n})^4}{e^{\sqrt{n}}} \to_{n\to+\infty} 0$ par croissance comparée donc :

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n^2} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

e $u_n = n^2\sin(1/n)$ or $\sin(x) \sim_0 x$ donc par substitution $\sin(1/n) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ donc $u_n \sim_{+\infty} n$ ne tend par vers 0 donc la série Σu_n diverge grossièrement.

f $u_n = n\sin(1/n^2) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ (idem ci-dessus) donc la série Σu_n diverge mais pas grossièrement car

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n} \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ est la série harmonique et est divergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série divergente.}$$

g $u_n = \left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$. Un peu plus délicat du point de vue technique car $\dfrac{3n}{4n-1} \sim_{+\infty} \dfrac{3}{4}$ mais on ne peut pas composer les équivalents donc pas déduire que $u_n \sim_{+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Il faut utiliser des inégalités, par exemple : pour $n \geq 2$, $4n-1 \geq \dfrac{7}{2}n$ donc $\dfrac{3n}{4n-1} \leq \dfrac{3n}{7n/2} = \dfrac{6}{7} < 1$ donc $u_n \leq \left(\dfrac{6}{7}\right)^{2n+1} = \dfrac{6}{7}\left(\left(\dfrac{6}{7}\right)^2\right)^n$, série convergente car $\left(\dfrac{6}{7}\right)^2 < 1$ donc :

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \leq \left(\dfrac{6}{7}\right)^{2n+1} \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\left(\dfrac{6}{7}\right)^{2n+1} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\left(\dfrac{6}{7}\right)^{2n+1} \text{ est une série géométrique convergente de raison } \left(\dfrac{6}{7}\right)^2 < 1 \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une}$$

série convergente.

h $u_n = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ donc :

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n^2} \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{2n^2} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{2n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

i $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}} = \dfrac{n^2+1-(n^2-1)}{\sqrt{n^4-1}\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} \sim_{+\infty} \dfrac{2}{2nn^2} = \dfrac{1}{n^3}$ donc :

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^3} \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n^3} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n^3} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

j $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$, on a $|u_n| = \dfrac{1}{n^2+1} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ d'où l'on déduit comme ci-dessus que la série Σu_n est absolument convergente donc convergente.

k $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln(1+1/n)}$. Or :

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{1}{2n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc :

$u_n=e-e^{1-\frac{1}{2n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}=e-e.e^{-\frac{1}{2n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}=e-e\left(1-\frac{1}{2n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{e}{2n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$

donc :

$$\left.\begin{array}{r}\cdot\ u_n\sim_{+\infty}\dfrac{e}{2n}\\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ sont des SATP}\\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ est la série harmonique et est divergente}\end{array}\right\}\text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série divergente.}$$

l $u_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{7}{24n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc :

$$\left.\begin{array}{r}\cdot\ u_n\sim_{+\infty}\dfrac{7}{24n^2}\\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{7}{24n^2} \text{ sont des SATP}\\ \cdot\ \Sigma\dfrac{7}{24n^2} \text{ est une série de Riemann convergente}\end{array}\right\}\text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

Exercice 9 *Montrer que la série* $\sum \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ *est convergente. Calculer sa somme et donner un développement asymptotique de ses sommes partielles tout ordre en* $\frac{1}{n}$.

Corrigé : $u_k = \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ n'est défini que pour $k \geq 2$; on peut calculer les sommes partielles :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k)) + \sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \\ &= -\ln(n)+\ln(n+1)-\ln 2 = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) \to_{n\to+\infty} -\ln(2) \end{aligned}$$

et le développement asymptotique s'obtient par le DL de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$\begin{aligned} S_n &= -\ln(2)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln(2)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln(2)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots+\frac{(-1)^{N+1}}{Nn^N}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^N}\right) \end{aligned}$$

Exercice 10 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1)-\arctan(n)$.
En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Corrigé : On a $\tan(\arctan(n+1)-\arctan(n)) = \frac{n+1-n}{1+n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}$.

De plus, $0 \leq \arctan(n) \leq \arctan(n+1) < \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leq \arctan(n+1)-\arctan(n) < \frac{\pi}{2} - \arctan(n) < \frac{\pi}{2}$ donc on a $\arctan(n+1)-\arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

On a donc une série télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan(k)) \\ &= \arctan(n+1)-\arctan(0) = \arctan(n+1) \to_{n\to\to+\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donc la série $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^4+n^2+1}$ *converge et calculer sa somme.*

1. **Corrigé : 1** *On a :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\left(k^2+1\right)^2-k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\left(k^2-k+1\right)\left(k^2+k+1\right)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{a}{k^2-k+1}+\dfrac{b}{k^2+k+1} = \dfrac{a\left(k^2+k+1\right)+b\left(k^2-k+1\right)}{\left(k^2-k+1\right)\left(k^2+k+1\right)} = \dfrac{(a+b)\,k^2+(a-b)\,k+a+b}{\left(k^2-k+1\right)\left(k^2+k+1\right)}$
d'où le système :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{(k+1)^2-(k+1)+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-(k+1)+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-k+1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2-k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right) \rightarrow_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

conclure....

Exercice 12 *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *des suites telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. *On suppose que les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum w_n$ *sont convergentes. Montrer que la série* $\sum v_n$ *est convergente.*

Exercice 13 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. *Montrer que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Corrigé : Observons que $(1+u_n)\,v_n = u_n$ donc $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ (on a toujours $v_n \neq 1$).

De là on vérifie facilement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Si leur limite est nulle, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Ce sont des SATP donc elles ont alors même nature.

Si elles n'ont pas pour limite 0 (qu'elles aient une autre limite ou non), les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont grossièrement divergentes donc de même nature.

Exercice 14 *Etudier la nature de la série de terme général* u_n :

1. $u_n = \sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+an}$, $a \in \mathbb{R}$.
2. $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$.*(étudier la limite de la suite* $n^2 u_n$*).*

Corrigé : 1 *Par expression conjuguée :*

$$u_n = \frac{n^4+n+1-(n^4+an)}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}} = \frac{(1-a)\,n+1}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}}$$

Or par factorisation par n^2 *on obtient facilement que le dénominateur est équivalent à* $2n^2$.

1er cas : $a \neq 1$, $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{(1-a)}{2n}$ *donc*

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \sim_{+\infty} \dfrac{(1-a)}{2n} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{(1-a)}{2n} \text{ est une SATP ou SATN} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ est la série harmonique et est divergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série divergente.}$$

2ème cas : $a = 1$. *Alors :*

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2n^2} \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{2n^2} \text{ sont des SATP (APCR pour } u_n) \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

2 $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$. *On a* $n^2 u_n = e^{2\ln(n)+\ln^2(n)-n\ln(\ln(n))}$; *or* $\ln^2(n) = o_{+\infty}(n\ln(\ln(n)))$ *et* $2\ln(n) = o_{+\infty}(n\ln(\ln(n)))$ *donc*

$$n^2 u_n = e^{-n\ln(\ln(n))+o_{+\infty}(n\ln(\ln(n)))} \to_{n\to+\infty} 0$$

donc $u_n = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *et :*

$$\left.\begin{array}{r} \cdot\ u_n = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n^2} \text{ sont des SATP (APCR pour } u_n) \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

Comparaison série-intégrale

Exercice 15 *Séries de Bertrand :*

1. *Etudier en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ $(n \geq 2)$.*

2. *En considérant les deux séries $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$, on constate qu'une certaine hypothèse d'un théorème important est indispensable. Précisez!*

3. *Etudiez la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ en fonction des paramètres réels α et β.*

Corrigé : 1 Posons $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ et $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(\ln(k))^\beta}$.

Tout d'abord, si $\beta \leq 0$, $\dfrac{1}{n} = O_{+\infty}(u_n)$ car $\dfrac{1}{nu_n} = (\ln(n))^\beta$ tend vers 0 ou 1 (si $\beta = 0$). Donc

$$: \left.\begin{array}{c} \cdot\ \dfrac{1}{n} = O_{+\infty}(u_n) \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{1}{n} \text{ est la série harmonique et est divergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série divergente.}$$

Supposons donc à présent $\beta > 0$.

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^\beta}$, f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $t > 1$:

$$f'(t) = \frac{-(\ln(t))^\beta - \beta(\ln(t))^{\beta-1}}{t^2(\ln(t))^{2\beta}} = -\frac{\ln(t) + \beta}{t^2(\ln(t))^{\beta+1}}$$

donc f est continue et décroissante sur $]1, +\infty[$ car $\beta > 0$.

Soit un entier $k \geq 2$, f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

donc par intégration d'inégalités :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta}(k+1-k) &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}(k+1-k) \\ \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \end{aligned}$$

On somme l'inégalité de droite de $k = 2$ à n et l'inégalité de gauche de $k = 2$ à $n-1$, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \text{ et } \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt$$

et comme $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} = S_n - \frac{1}{2(\ln(2))^\beta}$, il vient :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt \leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^\beta} dt$$

1er cas : $\beta \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^{n+1} &\leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \left[\frac{(\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^{n} \\ \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right) &\leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(n))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right) \end{aligned}$$

C'est l'inégalité de gauche qui permet de conclure car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right) = +\infty$ donc par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ diverge.

2ème cas : $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} &\leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + [\ln(\ln(t))]_2^n \\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) &\leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit encore que la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge car $\lim_{n\to+\infty} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))) = +\infty$.

3ème cas : $\beta > 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^{n+1} &\leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \left[\frac{(\ln(t))^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^{n} \\ \frac{1}{\beta-1}\left((\ln(2))^{1-\beta} - (\ln(n+1))^{1-\beta}\right) &\leq S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \frac{1}{\beta-1}\left((\ln(2))^{1-\beta} - (\ln(n))^{1-\beta}\right) \end{aligned}$$

c'est l'inégalité de droite qui est utile pour la convergence car elle montre que $S_n \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} + \frac{1}{\beta-1}(\ln(2))^{1-\beta}$ donc (S_n) est majorée. Or $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^\beta} \geq 0$ donc (S_n) est croissante donc la suite (S_n) est convergente donc la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge.

2 On a : $\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{1}{n\ln(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ or la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente (vu en cours) tandis que la série $\sum \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}\right)$ est divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente donc l'hypothèse "SATP" (ou "SATN") est indispensable dans le théorème affirmant que deux séries ayant des termes généraux équivalents sont de même nature.

3 1er cas : $\alpha < 1$, comparer à $\sum \frac{1}{n}$

2ème cas : $\alpha > 1$, comparer à $\sum \frac{1}{n^{\alpha'}}$ pour α' bien choisi.

Exercice 16 *Soit $\alpha > 1$ et R_n le reste de Cauchy de la série (convergente)* $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$. *Trouver un équivalent de R_n en $+\infty$.*

Corrigé : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ existe car la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge (car $\alpha > 1$).

Il faut appliquer la méthode comparaison série-intégrale, mais en commençant à $k = n$ fixé et non à $k = 1$ et en allant jusqu'à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$.

Faites un dessin! en l'adaptant à k variant entre n et N.

Soit $n \geq 1$ un entier fixé et $k \geq n$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc pour tout $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ donc par intégration des inégalités :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt$$

$$\begin{aligned} f(k+1)(k+1-k) &\leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)(k+1-k) \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \end{aligned}$$

On somme l'inégalité de droite de $k = n+1$ à N et l'inégalité de gauche de $k = n$ à $N-1$, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \text{ et } \sum_{k=n}^{N-1} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)dt$$

soit

$$\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{n+1}^{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_n^N$$

soit

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

Or tout admet une limite quand N tend vers $+\infty$ et par passage à la limite, on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$$

donc

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1)\,n^{\alpha-1}R_n \leq 1$$

Or $\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \to_{n\to+\infty} 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha-1)\,n^{\alpha-1}R_n = 1$ donc $R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$.

Exercice 17 *On note* (S_n) *la suite des sommes partielles de la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1. *Déterminer un équivalent de* (S_n).
2. *On pose* $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ *et* $v_n = u_n - u_{n-1}$ *pour* $n \geq 2$. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 2} v_n$ *est convergente et en déduire que* (S_n) *admet un développement asymptotique à l'ordre* $o_{+\infty}(1)$.
3. *On pose* $w_n = S_n - 2\sqrt{n} - \alpha$ *où* α *est la constante telle que* $w_n = o_{+\infty}(1)$ *(on ne cherchera pas à expliciter la valeur de* α*, c'est impossible...). Préciser la nature de la série de terme général* $(w_n - w_{n-1})$.
On admet le théorème suivant : si (β_n) *et* (γ_n) *sont deux SATP convergentes et si* $\beta_n \sim_{+\infty} \gamma_n$*, alors les restes de Cauchy* (R_n) *et* $\left(R_n'\right)$ *de ces séries sont équivalents.*
En déduire le développement asymptotique suivant :
$$S_n = 2\sqrt{n} + \alpha + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Corrigé : 1 Refaites avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ce qui est fait dans le cours avec α quelconque. On obtient $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}$.

2 $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$. On a :

$$\begin{aligned}
v_n &= S_n - 2\sqrt{n} - S_{n-1} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}} = \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}} \\
&= \frac{-1}{\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)} \sim_{+\infty} \frac{-1}{4n^{3/2}}
\end{aligned}$$

donc $\left.\begin{array}{c}\cdot\ v_n \sim_{+\infty} \dfrac{-1}{4n^{3/2}} \\ \cdot\ \Sigma v_n \text{ et } \Sigma\dfrac{-1}{4n^{3/2}} \text{ sont des SATN} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{-1}{4n^{3/2}} \text{ est une série de Riemann convergente}\end{array}\right\}$ donc Σv_n est une série convergente.

Or $v_n = u_n - u_{n-1}$ donc Σv_n est une série télescopique dont les sommes partielles valent $u_n - u_1$ donc la suite (u_n) est convergente. Notons $\alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Alors $u_n = S_n - 2\sqrt{n} = \alpha + o_{+\infty}(1)$ donc
$$S_n = 2\sqrt{n} + \alpha + o_{+\infty}(1)$$

3 On pose $w_n = S_n - 2\sqrt{n} - \alpha$. On a :
$$w_n - w_{n-1} = u_n - u_{n-1} - \alpha + \alpha = v_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{4n^{3/2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ w_n - w_{n-1} \sim_{+\infty} \dfrac{-1}{4n^{3/2}} \\ \text{donc} \quad \cdot\ \Sigma\left(w_n - w_{n-1}\right) \text{ et } \Sigma\dfrac{-1}{4n^{3/2}} \text{ sont des SATN (APCR pour } w_n - w_{n-1}) \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{-1}{4n^{3/2}} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma\left(w_n - w_{n-1}\right)$$

est une série convergente.

Notons $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(w_k - w_{k-1})$ et $R_n' = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{4k^{3/2}}$ les restes de Cauchy de ces séries convergentes, SATN et de termes généraux équivalents. D'après le théorème admis, $R_n \sim_{+\infty} R_n'$.
Or on a :

$$R_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} (w_k - w_{k-1}) = \lim_{N \to +\infty} (w_N - w_n) = -w_n$$

car w_N tend vers 0 d'après la question 2.
D'autre part, l'exercice précédent montre que $R_n' = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{4k^{3/2}} \sim_{+\infty} \frac{-1}{4}\frac{2}{n^{1/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{n}}$.
Donc $w_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $S_n = 2\sqrt{n} + \alpha + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 18 *Etudier suivant les valeurs du réel* α *la nature de la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n\ln(n)\left(\ln\left(\ln(n)\right)\right)^{\alpha}}$.

Autres techniques et applications

Exercice 19 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H(n) - \ln(n)$.*

1. *On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer par l'étude de la série $\sum v_n$ qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$$

2. *On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que $S_{2n} = H(2n) - H(n)$.*

3. *En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.*

4. *En recherchant par comparaison série-intégrale un équivalent du reste de la série de terme général v_n, trouver un équivalent de $\gamma - u_n$. Conclure.*

Corrigé : 1 $v_n = u_n - u_{n-1} = H(n) - \ln(n) - (H(n-1) - \ln(n-1))$ donc

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n^2} \end{aligned}$$

donc $\left.\begin{array}{l} \cdot\ v_n \sim_{+\infty} \dfrac{-1}{2n^2} \\ \cdot\ \Sigma v_n \text{ et } \Sigma \dfrac{-1}{2n^2} \text{ sont des SATN (APCR ?)} \\ \cdot\ \Sigma \dfrac{1}{2n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\}$ donc Σv_n est une série convergente.

Or la somme partielle de la série Σv_n est u_n à une constante près. Plus précisément :

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1 = u_n - 1$$

donc la suite (u_n) converge. Notons γ sa limite, on a $u_n = \gamma + o_{+\infty}(1)$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$.

2 Par récurrence.

Ou :

$$\begin{aligned}
S_{2n}+H(n) &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+1}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+1}+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}=\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=H(2n)
\end{aligned}$$

3 $S_{2n}=H(2n)-H(n)=\ln(2n)+\gamma+o_{+\infty}(1)-(\ln(n)+\gamma+o_{+\infty}(1))=\ln(2)+o_{+\infty}(1)$ donc $\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\ln(2)$. Or $S_{2n+1}=S_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\ln(2)$.

Les deux suites extraites de (S_n) des termes d'indices pairs et impairs convergent vers la même limite donc (S_n) aussi et $\lim_{n\to+\infty}S_n=\ln(2)$.

4 On a $v_n=\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}+\ln(n-1)-\ln(n)$. On pose $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x-1)-\ln(x)$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f(k)$.

On a pour $x>1$:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1-x+x^2-x(x-1)}{x^2(x-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)}\geq 0$$

donc f est croissante sur $]1,+\infty[$.

Remarquons que puisque $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, il en résulte que f est négative sur $]1,+\infty[$.

Soit k entier, $k>1$. Pour tout $t\in[k,k+1]$, on a :

$$f(k)\leq f(t)\leq f(k+1)$$

donc par intégration d'inégalités :

$$f(k)=\int_k^{k+1}f(k)\,dt\leq\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq\int_k^{k+1}f(k+1)\,dt=f(k+1)$$

On fixe $n>1$ et $N\geq n+1$ et on somme l'inégalité de droite de $k=n$ à $N-1$:

$$\int_n^N f(t)\,dt=\sum_{k=n}^{N-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq\sum_{k=n}^{N-1}f(k+1)=\sum_{k=n+1}^{N}f(k)$$

et on somme l'inégalité de gauche de $k=n+1$ à N :

$$\sum_{k=n+1}^{N}f(k)\leq\sum_{k=n+1}^{N}\int_k^{k+1}f(t)\,dt=\int_{n+1}^{N+1}f(t)\,dt$$

d'où :
$$\int_n^N f(t)\,dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_{n+1}^{N+1} f(t)\,dt$$
Or pour $t > 1$:
$$\begin{aligned}\int f(t)\,dt &= \int \left(\frac{1}{t} + \ln(t-1) - \ln(t)\right) dt = \ln(t) + (t-1)\ln(t-1) - t\ln(t) \\ &= (t-1)(\ln(t-1) - \ln(t)) = (t-1)\ln\left(\frac{t-1}{t}\right)\end{aligned}$$
donc :
$$(N-1)\ln\left(\frac{N-1}{N}\right) - (n-1)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq N\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
Or :
$$N\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) = -N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) = -N\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + o_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = -1+\frac{1}{2N}+o_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)$$
donc $\lim_{N\to+\infty} N\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) = -1$ et de même $\lim_{N\to+\infty} (N-1)\ln\left(\frac{N-1}{N}\right) = -1$ (changer N en $N-1$).
Donc par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ et car on sait déjà la série $\sum v_k$ convergente, on a :
$$-1-(n-1)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq -1 - n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
Ensuite :
$$-1-n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{-1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n}$$
et aussi $-1-(n-1)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{-1}{2(n-1)} \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n}$ donc par encadrement :
$$R_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n}$$
Enfin, on y arrive!,
$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} (u_k - u_{k-1}) = \lim_{N\to+\infty} (u_N - u_n) \\ &= \lim_{N\to+\infty} u_N - u_n = \gamma - u_n\end{aligned}$$
donc :
$$\gamma - u_n = \frac{-1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et $u_n = H(n) - \ln(n)$ donc :
$$H(n) = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 20 *Soit (u_n) une suite positive décroissante qui converge vers 0. On souhaite comparer la nature et éventuellement la somme des séries* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$.

On note pour tout $n \geq 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ *et* $B_n = \sum_{k=1}^{n} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$.

1. *Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq 1} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$ aussi et qu'elles ont même somme. On commencera par trouver une relation entre les sommes partielles de ces deux séries.*
2. *Vérifier que pour tous entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - mu_{n+1}$. En déduire que si la série $\sum_{n\geq 1} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.*
3. *Conclure.*

Corrigé : 1 On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. On a :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\,u_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} ku_k + \sum_{k=2}^{n+1} u_k \\ &= u_1 - (n+1)\,u_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} u_k \\ &= A_{n+1} - (n+1)\,u_{n+1} \end{aligned}$$

Or (u_n) est une suite positive donc $B_n \leq A_{n+1}$. Or la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, donc la suite (A_n) est majorée donc la suite (B_n) est majorée.
Or $\sum_{n\geq 1} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$ est une SATP car la suite (u_n) est décroissante. Donc la série $\sum_{n\geq 1} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$ converge aussi.
Donc par la relation $B_n = A_{n+1} - (n+1)\,u_{n+1}$, la suite $(n+1)\,u_{n+1}$ converge. Soit l sa limite. Si $l \neq 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{l}{n}$ et la série $\sum u_n$ serait divergente. Absurde. Donc $l = 0$ et par passage à la limite ci-dessus, on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1})$.

2 Soient m, n entiers tels que $1 \leq m \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned} B_n &= A_{n+1} - (n+1)\,u_{n+1} = A_m + \sum_{k=m+1}^{n+1} u_k - (n+1)\,u_{n+1} \\ &\geq A_m + (n-m+1)\,u_{n+1} - (n+1)\,u_{n+1} \text{ car } u_k \geq u_{n+1} \text{ pour } k \geq m+1 \\ &\geq A_m - mu_{n+1}. \end{aligned}$$

Or pour m fixé, $\lim_{n\to+\infty} mu_{n+1} = 0$ et en supposant que la série $\sum_{n\geq 1} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$ converge, $\lim_{n\to+\infty} B_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(u_k - u_{k+1}\right)$ donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient $A_m \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(u_k - u_{k+1}\right)$. Donc la suite (A_m) est majorée. Or la série $\sum u_n$ est à termes positifs donc cette série est convergente.

3 Les deux séries sont donc de même nature et dans le cas de la convergence, de même somme.

Exercice 21 *Soit $\sum u_n$ une série convergente où (u_n) est une suite positive décroissante. Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = 0$.
Indication : considérer la somme partielle S_n d'indice n et minorer $S_{2n} - S_n$.

Exercice 22 *Critère de d'Alembert : soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge et on note l sa limite.*

1. *Rappeler la quantification de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (définition de la limite).*
2. *On suppose $l > 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \alpha$.*
   En déduire une minoration pour $n \geq N$ de $\frac{u_n}{u_N}$ puis la nature de la série $\sum u_n$.
3. *On suppose $l < 1$. Montrer qu'il existe $\alpha < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$.*
   En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
4. *On suppose que $l = 1$. Donner deux exemples de séries, l'une convergente, l'autre non dont le terme général u_n tend vers 0 et vérifie dans les deux cas $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.*
5. *Application : déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ et $v_n = \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$.*

Corrigé : 1 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \varepsilon.$

2 On prend $\alpha = \frac{l+1}{2}$ et $\varepsilon = l - \alpha$. Alors d'après 1, $\exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq l - \alpha$ donc $\alpha - l \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \leq l - \alpha$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \alpha$.

Pour $n \geq N$, on a donc $\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}.\cdots.\frac{u_{N+1}}{u_N} \geq \alpha^{n-N}$ (tout est positif) donc $u_n \geq \alpha^{n-N} u_N$ (encore car $u_N > 0$).

Or $\alpha > 1$ donc $\alpha^{n-N} u_N \to_{n+\infty} +\infty$ donc par théorème de comparaison $u_n \to_{n+\infty} +\infty$ donc Σu_n est une série grossièrement divergente deonc divergente.

3 Idem avec $\alpha = \frac{l+1}{2}$ et $\varepsilon = \alpha - l$. Alors d'après 1, $\exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \alpha - l$ donc $l - \alpha \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \leq \alpha - l$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$.

Pour $n \geq N$, on a donc $\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}.\cdots.\frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \alpha^{n-N}$ (tout est positif) donc $u_n \leq \alpha^{n-N} u_N$ (encore car $u_N > 0$). donc:

$$\left.\begin{array}{c} \cdot\ u_n \leq \frac{u_N}{\alpha^N}\alpha^n \text{ APCR} \\ \cdot\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma\frac{u_N}{\alpha^N}\alpha^n \text{ sont des SATP} \\ \cdot\ \Sigma\frac{u_N}{\alpha^N}\alpha^n \text{ est une série géométrique convergente car } \alpha < 1 \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma u_n \text{ est une série convergente.}$$

4 $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n = \frac{1}{n^2}$.

5 $u_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)\,n^n}{2^n(n+1)^{n+1}} = \dfrac{2n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to_{n+\infty} \dfrac{2}{e}$ (exercice bien connu...)

donc puisque Σu_n est une SATP et $\dfrac{2}{e} < 1$, on est dans le cas 3 et la série Σu_n est convergente.

$v_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Attention!, ce n'est pas une SATP (pour $x < 0$), on ne peut pas appliquer les résultats ci-dessus. Mais on peut considérer la série de terme général $|v_n|$ tous strictement positifs (sauf le cas $x = 0$...) et $\dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \dfrac{|x|}{n+1} \to_{n+\infty} 0$ donc d'après le cas 3, la série $\Sigma\,|v_n|$ est convergente donc Σv_n est absolument convergente donc convergente.

Remarque : on peut même prendre $x \in \mathbb{C}$. On a déjà montré ce résultat par une autre méthode dans le cours.

Exercice 23 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^n n^{-n-1/2} n!$ et $v_n = \ln(u_n)$.*

1. *Etudier la convergence de la série de terme général $w_n = v_n - v_{n-1}$.*
2. *En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que :*
$$n! \sim_{+\infty} K n^n e^{-n} \sqrt{n}$$
3. *En utilisant l'exercice sur les intégrales de Wallis, montrer que $K = \sqrt{2\pi}$.*
En conclusion, on obtient la formule de Stirling :
$$\boxed{n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n}}$$

Corrigé : 1

$$\begin{aligned}
w_n &= v_n - v_{n-1} = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{e^n n^{-n-1/2} n!}{e^{n-1}(n-1)^{-n+1/2}(n-1)!}\right) \\
&= \ln\left(e\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1/2}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2}\right) \\
&= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= 1 - 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{+\infty} -\frac{1}{12n^2}
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \left.\begin{array}{c} \cdot\ w_n \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{12n^2} \\ \cdot\ \Sigma w_n \text{ et } \Sigma\dfrac{-1}{12n^2} \text{ sont des SATN (APCR ?)} \\ \cdot\ \Sigma\dfrac{-1}{12n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{array}\right\} \text{donc } \Sigma w_n \text{ est une série convergente.}$$

2 *Les sommes partielles de la série Σw_n valent $\sum_{k=2}^{n} w_k = \sum_{k=2}^{n}(v_k - v_{k-1}) = v_n - v_1$ donc la suite (v_n) est convergente. Notons L sa limite. On a $u_n = e^{v_n}$ donc la suite (u_n) converge vers $K = e^L$ et donc $K > 0$ et $u_n \sim_{+\infty} K$ donc $n! \sim_{+\infty} K n^n e^{-n}\sqrt{n}$*

3 *D'après l'exo sur les intégrales de Wallis, on a $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $I_{2n} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ or $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ donc :*

$$I_{2n} \sim_{+\infty} \frac{K(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}\left(K n^n e^{-n}\sqrt{n}\right)^2}\frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{n^{2n}\sqrt{2n}}{K n^{2n} n}\frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

donc $\dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}} \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ *donc* $K \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\pi}} \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi}$ *donc* $K = \sqrt{2\pi}$ *donc :*

$$n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi} n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

Exercice 24 *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. *En déduire que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.

Corrigé : Indications : pas d'inégalité de Taylor-Lagrange ici, plutôt la définition de $\cosh(x)$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1^n)) \frac{x^n}{n!}}{2} \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ car } (1 + (-1^n)) = 0 \text{ ou } 2 \text{ selon la parité de } n \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{2N} \frac{x^n}{n!} \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ (en posant } n = 2k). \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Or $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$. Comparons les deux séries "terme à terme" :

- si $n = 0$, $\frac{x^{2n}}{(2n)!} = x^{2n} = \frac{x^{2n}}{2^n n!}$.
- si $n \geq 1$:

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)}{2^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2} \geq 1$$

car $\frac{n+k}{2} \geq 1$ pour $k \geq 1$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ et les deux sommes convergeant : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, i.e. $\cosh(x) \leq e^{x^2/2}$.