Chapitre 19 : Produit scalaire, espaces euclidiens.

Proposition 1 *identités de polarisation:* $\forall\,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) \in E^2$ *on a :*

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) &= \frac{1}{2}\big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \big) \\
(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) &= \frac{1}{4}\big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \big)
\end{aligned}
$$

Proposition 2 *Identité du parallélogramme :*

Exemple 3 *Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^n$:

Exemple 4 *Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de* $C([a,b],\mathbb{R})$:

.1 Expression du projeté orthogonal.

Proposition 5 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et* $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_s})$ une base orthonormée de F.
Le projeté orthogonal $p(\overrightarrow{x})$ *d'un vecteur* $\overrightarrow{x}$ *de E s'écrit :*

$$p(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e_1})\,\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e_2})\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e_s})\,\overrightarrow{e_s}$$

Proposition 6 *Inégalité de Bessel : Soit p la projection orthogonale sur un sous-espace F de dimension finie de E. Alors pour tout* $\vec{x} \in E$:

$$\|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$$

Preuve : F est un sev de dimension finie de E donc $E = F \oplus F^{\perp}$. Soit $\vec{x} \in E$, alors $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in F^{\perp}$, et on a alors $p(\vec{x}) = \vec{y}$. Or $\vec{y} \perp \vec{z}$ donc (th. de Pythagore), $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{z}\|^2 \geq \|\vec{y}\|^2$ donc $\|\vec{y}\| = \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

Exercice 7 *Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel.*

Corrigé : Avec les notations de la preuve ci-dessus, il y a égalité ssi $\vec{z} = \vec{0}$ ie ssi $\vec{x} = \vec{y}$ ie ssi $\vec{x} \in F$.

Exercice 8 *On suppose que* $\dim(E) = 3$. *Soit* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ *une base orthonormée de E. On pose* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$ *et* $F = vect(\overrightarrow{u})$.

1. *Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.*

2. *En déduire la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.*

3. *En déduire la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.*

Corrigé : 1: Soit p la projection orthogonale sur F.

$\left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ est une BON de F donc pour tout $\vec{x} \in E$, $p(\vec{x}) = \left(\overrightarrow{x} \mid \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (\overrightarrow{x} \mid \vec{u}) \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

Or $\|\vec{u}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$ donc :

$p(\vec{e}_1) = \dfrac{1}{9}(\vec{e}_1 \mid \vec{u})\vec{u} = \dfrac{\vec{u}}{9} = \dfrac{1}{9}\overrightarrow{e_1} + \dfrac{2}{9}\overrightarrow{e_2} + \dfrac{2}{9}\overrightarrow{e_3}$

$p(\vec{e}_2) = \dfrac{1}{9}(\vec{e}_2 \mid \vec{u})\vec{u} = \dfrac{\vec{u}}{9} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{e_1} + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{e_2} + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{e_3}$

$p(\vec{e}_3) = \dfrac{1}{9}(\vec{e}_3 \mid \vec{u})\vec{u} = \dfrac{\vec{u}}{9} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{e_1} + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{e_2} + \dfrac{4}{9}\overrightarrow{e_3}$

donc :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Soit q projection orthogonale sur $F^{\perp}$. On a $p + q = Id_E$ donc :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(q) = I_3 - \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = I_3 - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3 Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. On a $s = 2p - Id_E$ donc :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(s) = 2\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) - I_3 = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 *Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.* $\phi : (f, g) \mapsto \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg$ *est un produit scalaire sur E. On note $\phi(f, g) = \langle f, g\rangle$.*
On définit des éléments e_k de E pour $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e_{2k}(x) = \cos(kx) \ \text{ et } e_{2k+1}(x) = \sin(kx).$$

1. *Vérifier que la famille (e_k) est orthonormale.*

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_n = Vect(e_k)_{1 \leq k \leq 2n}$, calculer la projection orthogonale sur F_n de la fonction ϕ, 2π-périodique, définie par $\phi(x) = |x|$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (vérifier d'abord que $\phi \in E$)*

Exemple 10 *On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on le munit du produit scalaire $(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$*

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$*

2. *On pose $F = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$. On admet que c'est un sev de E. Déterminer le projeté orthogonal de X sur F par deux méthodes différentes.*

3. *Calculer la distance de X à F.*

.1.1 Projection orthogonale sur un hyperplan

Proposition 11 *Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E. Alors il existe $\vec{u} \in E$ tel que $H = Vect(\vec{u})^{\perp}$*

Démonstration. On a $\dim\left(H^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(H) = 1$ donc $H^{\perp}$ est une droite vectorielle : $H^{\perp} = Vect(\vec{u})$ et on a :

$$H = \left(H^{\perp}\right)^{\perp} = Vect(\vec{u})^{\perp}$$

■

Théorème 12 *Soit $H = Vect(\vec{u})^{\perp}$ un hyperplan d'un espace euclidien E et p la projection orhogonale sur H. Alors :*

$$\forall \vec{x} \in E,\ p(\vec{x}) = \vec{x} - (\overrightarrow{x} \mid \vec{u}) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

Démonstration. $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est une BON de $Vect(\vec{u})$ donc si l'on note q la projection orthogonale sur $Vect(\vec{u})$, on a :

$$\forall \vec{x} \in E,\ q(\vec{x}) = \left(\overrightarrow{x} \mid \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (\overrightarrow{x} \mid \vec{u}) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

Or $p + q = Id$ donc :

$$\forall \vec{x} \in E,\ p(\vec{x}) = \vec{x} - (\overrightarrow{x} \mid \vec{u}) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

■

Corollaire 13 *La distance entre $\vec{x}$ et un hyperplan $H = Vect(\vec{u})^{\perp}$ est :*

$$d\left(\vec{x}, Vect(\vec{u})^{\perp}\right) = \frac{|(\overrightarrow{x} \mid \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$$

Démonstration. Le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $Vect(\vec{u})$ est $q(\vec{x}) = (\overrightarrow{x} \mid \vec{u}) \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ donc la distance cherchée est :

$$\begin{aligned} d\left(\vec{x}, Vect(\vec{u})^{\perp}\right) &= \|\vec{x} - p(\vec{x})\| \\ &= \|q(\vec{x})\| = \left\|(\overrightarrow{x} \mid \vec{u}) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right\| \\ &= \frac{|(\overrightarrow{x} \mid \vec{u})|}{\|\vec{u}\|^2} \|\vec{u}\| = \frac{|(\overrightarrow{x} \mid \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} \end{aligned}$$

■

Exercice 14 *Soit ϕ une application continue strictement positive sur $[-1,1]$.*
Pour $n\in\mathbb{N}$, sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire euclidien défini par $(P\mid Q)=\int_{-1}^{1}\phi(t)P(t)Q(t)\,dt$ et on note $\|P\|$ la norme associée.
La question 4 est indépendante des questions 1,2 et 3.

1 *On admet presque qu'il s'agit en effet d'un produit scalaire : montrer seulement le caractère défini positif.*
Le caractère positif ne pose pas de problème. Pour $(P\mid P)=0\Rightarrow P=0_{\mathbb{R}[X]}$, utiliser successivement le théorème de l'intégrale nulle puis le fait qu'un polynôme nul sur $[a,b]$ admet une infinité de racines donc est le polynôme nul.

2a *Montrer qu'il existe des polynômes $P_0,P_1,\ldots,P_n$ tels que :*

- $(1):\forall k\in[|0,n|],\ \deg(P_k)=k$
- $(2):\forall(i,j)\in[|0,n|]^2,\ i\neq j\Rightarrow(P_i\mid P_j)=0.$
- $(3):\forall k\in[|0,n|],\ \|P_k\|=1.$

On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base canonique $(1,X,\ldots,X^n)$. La famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ obtenue vérifie les conditions 2 et 3 puisqu'elle est orthonormée et aussi pour tout $k\in[|0,n|]$, $Vect\left(1,X,\ldots,X^k\right)=Vect(P_0,P_1,\ldots,P_k)$. Ainsi, $P_k\in Vect\left(1,X,\ldots,X^k\right)$ donc $\deg(P_k)\leq k$. Mais si on avait $\deg(P_k)<k$, alors on aurait $Vect(P_0,P_1,\ldots,P_k)\subset Vect\left(1,X,\ldots,X^{k-1}\right)$. D'où $\deg(P_k)=k$.

Exercice 15 **2b** *Soit $k\in[|1,n|]$.*

2bi *Montrer que P_k a au moins une racine réelle dans $]-1,1[$.*
On a $(P_k\mid P_0)=0$. Or le procédé d'orthonormalisation de Schmidt donne $P_0=\dfrac{1}{\|1\|}$ (au signe près mais peu importe). En tout cas, P_0 est une constante λ non nulle.et $(P_k\mid P_0)=\int_{-1}^{1}\lambda\phi(t)P(t)\,dt=0$ donc $\int_{-1}^{1}\phi(t)P(t)\,dt=0$. Si P_k n'avait pas de racine réelle dans $]-1,1[$, $\phi(t)P_k(t)$ serait de signe constant sur $[-1,1]$, continue et d'intégrale nulle donc nulle sur $[-1,1]$ d'après le théorème de l'intégrale nulle. Absurde car précisément $t\mapsto\phi(t)P_k(t)$ est supposée ne pas s'annuler sur $]-1,1[$.

2bii *Montrer que $P_k\in(\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.*
Soit $Q\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Alors $Q\in Vect\left(1,X,\ldots,X^{k-1}\right)=Vect(P_0,P_1,\ldots,P_{k-1})$. Or $(P_k\mid P_i)=0$ pour $i<k$ donc par linéarité à droite, $(P_k\mid Q)=0$. Donc $P_k\in(\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.

2biii *On appelle $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ les racines réelles distinctes de P_k dans $]-1,1[$ en-lesquelles P_k change de signe. En considérant le produit scalaire de P_k avec un polynôme bien choisi, montrer que $p=k$. Conclure sur la multiplicité des racines de P_k et le caractère scindé sur $\mathbb{R}$.*
On a $\deg(P_k)=k$ donc $p\leq k$. Supposons $p<k$ et posons $Q=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)$. Alors $Q\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc $(P_k\mid Q)=0$. Or on a :

$$\begin{aligned}(P_k\mid Q)&=\int_{-1}^{1}\phi(t)P_k(t)Q(t)\,dt\\&=\int_{-1}^{1}\phi(t)(t-\alpha_1)^2(t-\alpha_2)^2\cdots(t-\alpha_p)^2\widetilde{P_k}(t)\,dt\end{aligned}$$

car $P_k = \widetilde{P_k}(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)$ *avec* $\widetilde{P_k}$ *un polynôme ne changeant pas de signe sur* $[-1,1]$.
On a donc une intégrale nulle d'une fonction continue et de signe constant donc d'après le théorème de l'intégrale nulle, cette fonction est nulle sur $[-1,1]$ *donc* $\widetilde{P_k}$ *s'annule en une infinité de points donc est le polynôme nul donc* P_k *aussi, absurde ! Donc* $p=k$.
Ainsi, P_k *est de degré* k *et a dans* $[-1,1]$ k *racines distinctes donc ce sont toutes les racines de* P_k*, elles sont simples et* P_k *est sciné sur* $\mathbb{R}$.

2c *Montrer que pour tout* $k \in [|1,n-1|]$, *le polynôme* XP_k *appartient au sous-espace* $Vect(P_{k-1},P_k,P_{k+1})$.
Soit $k \in [|1,n-1|]$. *On a* $\deg(XP_k) = k+1$ *donc* $XP_k \in Vect(P_0,P_1,\ldots,P_k,P_{k+1})$ *et cette base de* $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ *est orthonormée donc il s'écrit* $XP_k = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{k+1}P_{k+1}$ *avec pour tout* $i \leq k-2$:

$$\lambda_i = (XP_k \mid P_i) = \int_{-1}^{1} \phi(t)\, tP_k(t)\, P_i(t)\, dt = (P_k \mid XP_i) = 0$$

car $XP_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ *et* $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.

3 *Dans cette question, on prend pour* ϕ *la fonction constante égale à* 1. *Ainsi* $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$.

3a *Justifier qu'il existe des polynômes* $L_0, L_1, \ldots, L_n$ *uniques tels que :*

- $(1) : \forall k \in [|0,n|],\ \deg(L_k) = k$
- $(2) : \forall (i,j) \in [|0,n|]^2,\ i \neq j \Rightarrow (L_i \mid L_j) = 0.$
- $(3) : \forall k \in [|0,n|],\ L_k(1) = 1.$

En posant $L_i = \dfrac{P_i}{P_i(1)}$ *(*$P_i(1) \neq 0$ *car toutes les racines de* P_i *sont dans* $]-1,1[$, *on a une famille de polynômes* $L_0, L_1, \ldots, L_n$ *qui vérifie les conditions* (1), (2) *et* $3)$*).*
Pour l'unicité, il faut remarquer (voir 2a) que la condition (1) *est équivalente à* $\forall k \in [|0,n|]$, $Vect\left(1, X, \ldots, X^k\right) = Vect(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ *donc les polynômes* $L_0, L_1, \ldots, L_n$ *sont nécessairement à coefficient multiplicatif près ceux obtenus par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, c'est-à dire* $P_0, P_1, \ldots, P_n$. *Et la condition* (3) *fixe une unique valeur possible pour ces constantes multiplicatives, à savoir* $\dfrac{1}{P_i(1)}$.

3b *Montrer que pour* $k \in [|0,n|]$ *fixé, il existe* Q_k *unique vérifiant les 3 conditions :*

$$\deg(Q_k) = 2k,\ \ (X-1)^k \text{ divise } Q_k,\ \ L_k = Q_k^{(k)} \text{ (dérivée } k\text{-ième)}$$

Soit $k \in [|0,n|]$. *On peut écrire* L_k *dans la base* $\left((X-1)^i\right)_{i=0,\ldots,k}$ *de* $\mathbb{R}_k[X]$ *(c'est aussi la formule de Taylor pour les polynômes) :*

$$L_k = a_0 + a_1(X-1) + \cdots + a_k(X-1)^k$$

et chercher Q_k *dans la base* $\left((X-1)^i\right)_{i=0,\ldots,2k}$ *de* $\mathbb{R}_{2k}[X]$:

$$Q_k = b_0 + b_1(X-1) + \cdots + b_{2k}(X-1)^{2k}$$

La condition $L_k = Q_k^{(k)}$ fixe de manière unique les valeurs des coefficients $b_{k+1}, \dots, b_{2n}$ (on peut expliciter facilement), tandis que la condition $(X-1)^k$ divise Q_k revient à $b_0 = b_1 = \cdots = b_k = 0$.
Enfin, $\deg(L_k) = k$ *et* $L_k = Q_k^{(k)}$ *donne nécessairement* $\deg(Q_k) = 2k$.

3c *En utilisant les questions précédentes, montrer que $(X+1)^n$ divise Q_n. Indication : justifier que pour tout $k \in [|0, n-1|]$, $\left(L_n \mid X^k\right) = 0$ et commencer par examiner ce que donne $k = 0$ puis $k = 1$.*
L_n est colinéaire à P_n et $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$ donc pour tout $k \in [|0, n-1|]$, $\left(L_n \mid X^k\right) = 0$.

- *$(L_n \mid 1) = 0$ donc $\int_{-1}^{1} Q_n^{(n)}(t)\, dt = 0$ donc $Q_n^{(n-1)}(-1) = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$ car $(X-1)^n$ divise Q_n.*
- *$(L_n \mid X) = 0$ donc $\int_{-1}^{1} t Q_n^{(n)}(t)\, dt = 0$ donc (IPP), $\left[t Q_n^{(n-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_n^{(n-1)}(t)\, dt = 0$ donc $\int_{-1}^{1} Q_n^{(n-1)}(t)\, dt = 0$ donc $Q_n^{(n-2)}(-1) = Q_n^{(n-2)}(1) = 0$ car $(X-1)^n$ divise Q_n.*
- *supposons pour $s \in [|1, n-1|]$ avoir prouvé $Q_n^{(j)}(-1) = 0$ pour tout $j \in [|s, n-1|]$.*
  Or $(L_n \mid X^{n-s}) = 0$ donc $\int_{-1}^{1} t^{n-s} Q_n^{(n)}(t)\, dt = 0$. Des IPP successives (à détailler !!) et les hypothèses de récurrence forte conduisent à $Q_n^{(s-1)}(-1) = Q_n^{(s-1)}(1) = 0$ car $(X-1)^n$ divise Q_n.
- *Ainsi, par récurrence descendante forte, on obtient $Q_n(-1) = Q_n'(-1) = \cdots = Q_n^{(n-1)}(-1) = 0$ ce qui montre que $(X+1)^n$ divise Q_n.*

3d *En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \mu \left(X^2 - 1\right)^n$ puis montrer que $\mu = \dfrac{1}{2^n n!}$.*
Ainsi, $(X+1)^n (X-1)^n$ divise Q_n et $\deg(Q_n) = 2n$ *donc il existe μ tel que $Q_n = \mu \left(X^2 - 1\right)^n$.*
Or $L_n = Q_n^{(n)}$ donc par la formule de Leibniz :

$$L_n = \mu \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n-k)}$$

D'autre part, $L_n(1) = 1$ et $\left((X-1)^n\right)^{(k)}(1) = 0$ sauf si $k = n$ donc :

$$1 = \mu \binom{n}{n} \left((X-1)^n\right)^{(n)}(1) \left((X+1)^n\right)^{(0)}(1) = \mu n! 2^n$$

donc $\mu = \dfrac{1}{2^n n!}$.
Ainsi, $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$ (formule de Rodrigues).

4 *Dans cette question, on prend pour ϕ la fonction $\phi(t) = \sqrt{1 - t^2}$. On admettra que $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} P(t) Q(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On rappelle qu'on n'aura pas à utiliser les questions 2 et 3 dans cette question.*

4a *Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \sin((n+1)x) = \sin(x) Q_n(\cos(x))$$

Indication : prouver séparément l'existence et l'unicité, et pour l'existence, passer par les nombres complexes.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin\left((n+1)x\right) &= \operatorname{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^{n+1}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} i^k \sin^k(x)\cos^{n+1-k}(x)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k} i^k \sin^k(x)\cos^{n+1-k}(x)\right) \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2l+1}(-1)^l \sin^{2l+1}(x)\cos^{n-2l}(x) \\
&= \sin(x)\sum_{l=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2l+1}(-1)^l\left(1-\cos^2(x)\right)^l\cos^{n-2l}(x) = \sin(x)\,Q_n(\cos(x))
\end{aligned}$$

en posant $Q_n(X) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2l+1}(-1)^l(1-X^2)^l X^{n-2l}$. *D'où l'existence.*
L'unicité résulte de ce que si R_n *vérifie aussi* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)x) = \sin(x)R_n(\cos(x))$ *alors dès que* $\sin(x) \neq 0$, $R_n(\cos(x)) = Q_n(\cos(x))$ *donc* $Q_n - R_n$ *admet une infinité de racines donc est nul donc* $R_n = Q_n$.

4b *Donner le degré et le coefficient dominant de* Q_n.
Puisque $\deg\left((1-X^2)^l X^{n-2l}\right) = n$, *on a* $\deg(Q_n) \leq n$ *et le coefficient de* X^n *est*

$$\sum_{l=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2l+1}(-1)^l(-1)^l = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2l+1} > 0$$

donc $\deg(Q_n) = n$.
En développant par le binome de Newton $(1+1)^{n+1}$ *et* $(1-1)^{n+1}$, *et en séparant les indices pairs et les indices impairs, on obtient (à détailler) :*

$$c(Q_n) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2l+1} = \sum_{l=0}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}\binom{n+1}{2l} = \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$$

4c *Montrer que les* Q_k *sont deux à deux orthogonaux.*
Soient i, j *des entiers distincts, alors*

$$(Q_i \mid Q_j) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,Q_i(t)\,Q_j(t)\,dt$$

on pose $t = \cos(u)$, $dt = -\sin(u)\,du$ *et on a :*

$$\begin{aligned}
(Q_i \mid Q_j) &= \int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2(u)}\,Q_i(\cos(u))\,Q_j(\cos(u))\,(-\sin(u))\,du \\
&= \int_0^{\pi}\sin(u)\,Q_i(\cos(u))\sin(u)\,Q_j(\cos(u))\,du = \int_0^{\pi}\sin((i+1)u)\sin((j+1)u)\,du \\
&= \frac{-1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos((i+j+2)u) - \cos((i-j)u)\right)du = \cdots = 0 \text{ (car } i \neq j\text{).}
\end{aligned}$$

Le même calcul avec $i = j = n$ *donne* $\|Q_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4d *On considère l'application* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x, y, z) = \int_{-1}^{1} (t^3 - xt^2 - yt - z)^2 \sqrt{1 - t^2} dt$. *Montrer que* g *admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint. Calculer ce minimum (on pourra admettre* $(X^3 \mid X) = \frac{\pi}{16}$ *et* $\|X^3\|^2 = \frac{5\pi}{128}$ *et* $\|X\|^2 = \frac{\pi}{8}$ *en indiquant comment faire ces calculs).*

Posons $P = xX^2 + yX + z$. *Alors* $g(x, y, z) = \int_{-1}^{1} (t^3 - xt^2 - yt - z)^2 \sqrt{1 - t^2} dt = \|X^3 - P\|^2$ *et lorsque* x, y, z *parcourent* $\mathbb{R}^3$, P *parcourt* $\mathbb{R}_2[X]$. *Donc* g *admet un minimum car c'est le carré de la distance de* X^3 *au sev de dimension finie* $\mathbb{R}_2[X]$. *On sait que cette distance est un minimum et qu'il est atteint en un point unique qui est le projeté orthogonal* $p(X^3)$ *de* X^3 *sur* $\mathbb{R}_2[X]$.

Enfin, (Q_0, Q_1, Q_2) *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}_2[X]$ *donc :*

$$p(X^3) = \frac{(X^3 \mid Q_0)}{\|Q_0\|^2} Q_0 + \frac{(X^3 \mid Q_1)}{\|Q_1\|^2} Q_1 + \frac{(X^3 \mid Q_2)}{\|Q_2\|^2} Q_2$$

On peut calculer $Q_0 = 1$, $Q_1 = 2X$ *et* $Q_2 = 4X^2 - 1$ *d'où*

$$p(X^3) = \frac{2}{\pi} \left((X^3 \mid 1) + 4 (X^3 \mid X) X + (X^3 \mid 4X^2 - 1)(4X^2 - 1) \right)$$

Ensuite, on a $(X^n \mid X^p) = \int_{-1}^{1} t^{n+p} \sqrt{1 + t^2} dt = 0$ *si* $n + p$ *est impair car la fonction sous 'intégrale est alors impaire.*

Enfin, $(X^3 \mid X) = \int_0^{\pi} \cos^4(u) \sin^2(u) du$ *et après linéarisation, on trouve* $\cos^4(u) \sin^2(u) = \frac{1}{32}(2 + \cos(2u) - 2\cos(4u) - \cos(6u))$ *puis* $(X^3 \mid X) = \frac{\pi}{16}$ *et finalement,* $p(X^3) = \frac{X}{2}$.

D'après le cours, le minimum de g *vaut alors :*

$$\begin{aligned} \|X^3 - p(X^3)\|^2 &= \|X^3\|^2 + \left\|\frac{X}{2}\right\|^2 - 2\left(X^3 \mid \frac{X}{2}\right) \\ &= \frac{5\pi}{128} + \frac{1}{4}\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{128} \end{aligned}$$

les calculs non explicités se font encore par linéarisation.