

T.D.20 : Dénombrements. Espace probabilisé fini.

I Dénombrements

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$$

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= n2^{n-1} \text{ car } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ donc } \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \\ n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^k 1^{n-1-k} &= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) \text{ car } \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} \text{ donc } \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \\ \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - 1 \right) &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^k 1^{n+1-k} - 1 \right) = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

Posons $S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $T = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$. Remarquons que pour $k = E\left(\frac{n}{2}\right)$, $2k+1$ vaut $n+1$ si n est pair et n si n est impair et on rappelle que $\binom{n}{n+1} = 0$.

$$\text{On a donc } S + T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } S - T = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

$$\text{donc } S = \frac{1}{2} (S + T + S - T) = \frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1}.$$

Exercice 2 Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Démontrer l'égalité :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 3 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et E un ensemble de n personnes. Chacune de ces personnes envoie une lettre, et une seule à l'une quelconque des $n-1$ autres personnes.

1. De combien de manières différentes les n lettres peuvent-elles être adressées?
2. Une personne A étant fixée à l'avance et j étant un entier entre 0 et $n-1$, on note N_j le nombre de manières de distribuer les n lettres de telle sorte que A reçoive exactement j lettres. Calculer N_j .

Corrigé : Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et E un ensemble de n personnes. Chacune de ces personnes envoie une lettre, et une seule à l'une quelconque des $n - 1$ autres personnes.

1. De combien de manières différentes les n lettres peuvent-elles être adressées?

Chaque personne a $n - 1$ possibilités pour l'envoi de sa lettre, soit $(n - 1)^n$ possibilités au total.

2. Une personne A étant fixée à l'avance et j étant un entier entre 0 et $n - 1$, on note N_j le nombre de manières de distribuer les n lettres de telle sorte que A reçoive exactement j lettres.

Calculer N_j .

Il y a $\binom{n-1}{j}$ façons de choisir les j personnes qui envoient leur lettre à A et A a $n - 1$ choix pour l'envoi de sa lettre et les $n - j - 1$ personnes restantes ont chacune $n - 2$ possibilités, donc : $N_j = \binom{n-1}{j} (n - 1) (n - 2)^{n-1-j}$

Exercice 4 Déterminer le nombre de numéros de téléphone à 10 chiffres tels que :

1. le numéro est formé avec deux 1, deux 3 et six 7.

2. le numéro est formé avec deux chiffres distincts et deux seulement.

3. le numéro comporte trois 1 et trois seulement.

Corrigé : Déterminer le nombre de numéros de téléphone à 10 chiffres tels que :

1. le numéro est formé avec deux 1, deux 3 et six 7.

Il y a $\binom{10}{2}$ places pour les 1 puis $\binom{8}{2}$ places pour les 3, puis ne reste qu'une possibilité pour les six 7, donc la réponse est : $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2}$

2. le numéro est formé avec deux chiffres distincts et deux seulement.

Il y a $\binom{10}{2}$ façons de choisir les deux chiffres distincts a et b . Si a est placé k fois, b est placé $n - k$ fois donc k varie de 1 à 9, et pour chaque k , il y a $\binom{10}{k}$ places pour a et les autres places sont

prises par b donc la réponse est : $\binom{10}{2} \times \sum_{k=1}^9 \binom{10}{k}$. Remarquons :

$$\sum_{k=1}^9 \binom{10}{k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} - \binom{10}{0} - \binom{10}{10} = 2^{10} - 2$$

ce qui peut aussi s'obtenir en remarquant qu'il s'agit là de compter tous les mots composés des seules lettres a et b sauf les deux mots ne comportant qu'une seule de ces deux lettres.

3. le numéro comporte trois 1 et trois seulement.

Il y a $\binom{10}{3}$ façons de placer les 1 puis 9 chiffres possibles pour les 7 places restantes donc la réponse est : $\binom{10}{3} \times 9^7$

Exercice 5 On lance 3 pièces ensemble 100 fois de suite et on compte le nombre de FACE sortis : pour la pièce A, FACE est sorti 70 fois, pour B 50 fois et pour C 56 fois. FACE est sorti simultanément pour A et B 31 fois, pour B et C 28 fois. Montrer que FACE est sorti simultanément pour A, B et C au moins 9 fois, et PILE au plus 11 fois.

Corrigé : On note F_1 (respectivement F_2 et F_3) l'ensemble des numéros des lancers de la pièce 1 (resp. 2 et 3) ayant donné FACE.

On cherche à minorer $|F_1 \cap F_2 \cap F_3|$ et c'est sur F_2 qu'on a le plus d'informations.

Or $(F_1 \cup F_3) \cap F_2 = (F_1 \cap F_2) \cup (F_3 \cap F_2)$ donc

$$|(F_1 \cup F_3) \cap F_2| = |F_1 \cap F_2| + |F_3 \cap F_2| - |F_1 \cap F_2 \cap F_3| \leq |F_2| \text{ car } (F_1 \cup F_3) \cap F_2 \subset F_2$$

donc $|F_1 \cap F_2 \cap F_3| \geq 31 + 28 - 50 = 9$ donc FACE est sorti simultanément pour A, B et C au moins 9 fois.

On cherche à majorer $|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}|$. On utilise le fait que $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3} \subset \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ donc $|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}| \leq |\overline{F_1} \cap \overline{F_2}|$.

$$\text{Or } |F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| = 70 + 50 - 31 = 89.$$

Donc $|\overline{F_1} \cap \overline{F_2}| = |\overline{F_1 \cup F_2}| = 100 - 89 = 11$ donc PILE est sorti simultanément pour A, B et C au plus 11 fois.

Exercice 6 On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

1. exactement trois coeurs.
2. au plus trois coeurs.
3. au moins trois coeurs.
4. exactement trois dames et au moins deux piques.

Corrigé : 1. exactement trois coeurs.

Il y a $\binom{13}{3}$ choix des trois coeurs puis $\binom{39}{10}$ façons de choisir les autres cartes donc la réponse est $\binom{13}{3} \times \binom{39}{10}$.

2. au plus trois coeurs.

$$\binom{13}{3} \times \binom{39}{10} + \binom{13}{2} \times \binom{39}{11} + \binom{13}{1} \times \binom{39}{12} + \binom{13}{0} \times \binom{39}{13}$$

Attention :calcul faux : $\binom{39}{10}$ pour les dix cartes sans coeurs et $\binom{42}{3}$ pour les 3 cartes restantes pourrait conduire à la réponse $\binom{39}{10} \times \binom{42}{3}$ qui est fausse car certains tirages sont comptés plusieurs fois

3. au moins trois coeurs.

$$\binom{52}{13} - \binom{13}{2} \times \binom{39}{11} - \binom{13}{1} \times \binom{39}{12} - \binom{13}{0} \times \binom{39}{13}$$

4. exactement trois dames et au moins deux piques.

Comptons les tirages sans la dame de pique: il faut choisir les trois autres dames puis il reste 48 cartes dont 12 piques parmi lesquelles il faut choisir 10 cartes dont au moins 2 piques. Il y a $\binom{48}{10} - \binom{12}{1} \times \binom{36}{9} - \binom{12}{0} \times \binom{36}{10}$ façons de faire cela.

Comptons les tirages avec la dame de pique : il y a $\binom{3}{2}$ façons de choisir les dames, puis reste à choisir 10 cartes dont au moins 1 pique parmi 48 cartes dont 12 piques. Soit $\binom{3}{2} \left(\binom{48}{10} - \binom{12}{0} \times \binom{36}{10} \right)$. Au total, $N = \binom{48}{10} - \binom{12}{1} \times \binom{36}{9} - \binom{12}{0} \times \binom{36}{10} + \binom{3}{2} \left(\binom{48}{10} - \binom{12}{0} \times \binom{36}{10} \right)$.

Exercice 7 1.

2. On dispose dix livres sur une étagère. De combien de façons peut-on les ranger?
3. Parmi les dix livres, il y a trois livres de maths et quatre romans. Les livres de maths sont rigoureusement identiques, les autres livres sont deux à deux distincts. De combien de façons peut-on les ranger si on souhaite que les romans soient côte à côte?
4. Et si on impose en plus que les livres de maths soient côte à côte?

Corrigé : 1. On dispose dix livres sur une étagère. De combien de façons peut-on les ranger?

Il y a 10 positions pour le premier livre, 9 pour le deuxième, etc... donc au total $10!$ façons de les ranger.

2. Parmi les dix livres, il y a trois livres de maths et quatre romans. Les livres de maths sont rigoureusement identiques, les autres livres sont deux à deux distincts. De combien de façons peut-on les ranger si on souhaite que les romans soient côte à côte?

Il peut y avoir 0, 1, ..., 6 livres placés avant les romans, et il y a $4!$ ordonnancements possibles des romans. Donc il y a $7 \times 4!$ positions différentes possibles pour les romans. Ce choix fait, il reste

à placer 6 livres sur 6 places, et il y a $6!$ façons de le faire. Mais comme 3 livres sont identiques, chaque positionnement est obtenu $3!$ fois.

Au total, on a $\frac{7 \times 4! \times 6!}{3!}$ façons de ranger les livres avec les romans côte à côte.

3. Et si on impose en plus que les livres de maths soient côte à côte?

Notons $L1$, $L2$ et $L3$ les livres qui ne sont ni de maths ni des romans, M le groupe des trois livres de maths et R celui des quatre romans.

Choisissons d'abord l'ordre dans-lequel sont rangés $L1$, $L2$, $L3$, M et R . Il y a $5!$ ordres différents possibles.

Une fois un tel ordre choisi, il reste $4!$ façons d'ordonner les romans dans leur groupe (les livres de maths sont identiques).

Ainsi, il y a $5! \times 4!$ façons de ranger les livres avec les romans côte à côte et les livres de maths côte à côte.

Autre sol.pour la question 2 : Le même type de raisonnement en distinguant $M1$, $M2$ et $M3$ donne $\frac{7! \times 4!}{3!}$ (réponse identique) façons de ranger les livres avec les romans côte à côte.

Exercice 8 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue k ($1 \leq k \leq n$) tirages successifs sans remise d'une boule et on note le numéro. On obtient ainsi une liste de k nombres.

1. Quel est le nombre de résultats possibles?
2. Combien de suites croissantes peut-on obtenir?

Corrigé : 1. Quel est le nombre de résultats possibles?

On obtient la plus générale des k -listes d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ soient

$$\mathbf{A}_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

résultats possibles.

2. Combien de suites croissantes peut-on obtenir?

On note S_c le nombre de suites croissantes que l'on peut obtenir et S le nombre de résultats possibles. Chaque suite croissante correspond à $k!$ résultats différents après permutation des éléments de la liste obtenue (c'est-à-dire qu'il y a $k!$ tirages contenant le même ensemble de k nombres et que parmi ces $k!$ tirages, un et un seul donne ces nombres dans l'ordre croissant).. Ainsi, il y a $\frac{\mathbf{A}_n^k}{k!} = \binom{n}{k}$ suites croissantes obtenues par tirages successifs sans remise.

Exercice 9 Soit E l'ensemble des mots de 9 lettres.

1. Déterminer le cardinal de E .
2. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 4 fois la lettre a .
3. Déterminer le nombre de mots de E pour lesquels (au moins) 2 lettres distinctes se répètent chacune au moins une fois.
4. Déterminer le nombre de mots contenant la lettre a .
5. Déterminer le nombre de mots contenant la lettre a et sans répétition.

6. Déterminer le nombre de mots contenant la lettre a avec au moins une lettre qui se répète (a ou une autre).

Corrigé : 1. Déterminer le cardinal de E .

$$|E| = 26^9.$$

2. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 4 fois la lettre a .

Les 4 a peuvent être positionnés de $\binom{9}{4}$ façons. Il reste 25 possibilités pour les 5 places restantes donc il y a $\binom{9}{4} \times 25^5$ mots de E contenant exactement 4 fois la lettre a .

3. Déterminer le nombre de mots de E pour lesquels au moins 2 lettres distinctes se répètent chacune au moins une fois.

Il y a \mathbf{A}_{26}^9 mots dont aucune lettre ne se répète.

Comptons les mots dont exactement une lettre (et pas plus) se répète au moins une fois. Il y a 26 choix possibles de la lettre, qui peut se répéter k fois pour k variant de 2 à 9. Pour chaque k , il y a $\binom{9}{k}$ positions possibles pour ces lettres et il reste $9 - k$ positions pour les 25 lettres restantes, et on n'a plus droit aux répétitions de lettres, soit \mathbf{A}_{25}^{9-k} possibilités. Il y a donc $26 \times \sum_{k=2}^9 \binom{9}{k} \times \mathbf{A}_{25}^{9-k}$ mots de E dont exactement une lettre (et pas plus) se répète au moins une fois.

Donc le nombre de mots de E pour lesquels 2 lettres distinctes se répètent chacune au moins une fois est :

$$26^9 - \mathbf{A}_{26}^9 - 26 \times \sum_{k=2}^9 \binom{9}{k} \times \mathbf{A}_{25}^{9-k} = 26^9 - \frac{26!}{17!} - 26 \times \sum_{k=2}^9 \binom{9}{k} \times \frac{25!}{(25 - 9 + k)!}.$$

4. tous les mots sauf ceux sans a : $26^9 - 25^9$

5. 9 façons de positionner a , puis reste à former un mot de 8 lettres sur un alphabet de 25, sans répétition, il y a \mathbf{A}_{25}^8 possibilités.

6. $6 = 4 - 5$. Ou discuter suivant la lettre que a se répète ou non.

Si c'est non, 9 positions pour a , à multiplier par $(25^8 - \mathbf{A}_{25}^8)$ (tous les mots de 8 lettres moins ceux sans répétition, sur un alphabet de 25 lettres).

Si a se répète, elle se répète k fois d'où : $\sum_{k=2}^9 \binom{9}{k} \times 25^{9-k}$.

Le binôme de Newton assure que les deux solutions donnent le même résultat.

Exercice 10 Vous souhaitez monter un escalier de 13 marches. Vous ne pouvez progresser que par sauts d'une ou deux marches.

1. De combien de façons différentes pouvez-vous arriver au sommet?

On remarquera qu'une telle progression est une suite de 1 et de 2 dont la somme vaut 13.

2. On suppose maintenant que l'escalier comporte n marches ($n \in \mathbb{N}^*$). On note G_n le nombre de progressions possibles jusqu'au sommet. Etablir une relation de récurrence entre G_{n+2} , G_{n+1} et G_n . En déduire G_n .

Corrigé : 1. Vous souhaitez monter un escalier de 13 marches. Vous ne pouvez progresser que par sauts d'une ou deux marches. De combien de

façons différentes pouvez-vous arriver au sommet?

On remarquera qu'une telle progression est une suite de 1 et de 2 dont la somme vaut 13.

Une telle progression comporte k fois "2" avec k compris entre 0 et 6.

Pour chaque k , il y aura $13 - 2k$ fois "1" et il reste à choisir la position des "2" parmi les $13 - k$ positions correspondants à des sauts. Il y a $\binom{13-k}{k}$ choix possibles.

$$\text{Ainsi, } N = \sum_{k=0}^6 \binom{13-k}{k}$$

$$N = 1 + 12 + \frac{11 \times 10}{2} + \frac{10 \times 9 \times 8}{6} + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{120} + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{720}$$

$$= 13 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7 = 370$$

2. On suppose maintenant que l'escalier comporte n marches ($n \in \mathbb{N}^*$). On note G_n le nombre de progressions possibles jusqu'au sommet. Etablir une relation de récurrence entre G_{n+2} , G_{n+1} et G_n . En déduire G_n .

Il convient de distinguer les progressions de $n + 2$ marches dont la dernière étape est un saut d'une marche, il y en a G_{n+1} , de celles dont la dernière étape est un saut de deux marches, il y en a G_n .

Ainsi, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$ de racines $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Donc : } G_n = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n ; G_1 = 1 \text{ et } G_2 = 2 \text{ donc } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{5} \text{ et } b = \frac{1 - \sqrt{5}}{5}.$$

On peut aussi poser $G_0 = 1$ pour avoir $G_2 = G_0 + G_1$ et avoir avec $n = 0$ une équation plus simple pour trouver a et b .

II Espaces probabilisés finis

Exercice 11 Une urne contient 15 boules: une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité des évènements suivants :

(a) A : "Le tirage est tricolore"

(b) B : "Parmi les trois boules, il y a exactement une noire et au moins une rouge".

(c) C : "Les trois boules tirées sont de la même couleur"

2. On suppose maintenant que les tirages s'effectuent successivement, avec remise. Déterminer les probabilités des trois évènements ci-dessus.

Corrigé :

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne.

Soit Ω l'ensemble des combinaisons de 3 éléments parmi 15, muni de la probabilité uniforme.

(a) A : "Le tirage est tricolore"

Nombre de tirages possibles: $\binom{15}{3}$ et tous les tirages sont équiprobables.

Nombre de tirages favorables: $\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1}$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1}}{\binom{15}{3}}$$

(b) B : "Parmi les trois boules, il y a une noire et au moins une rouge".

Nombre de tirages possibles: $\binom{15}{3}$

Les tirages comportant une noire et au moins une rouge sont obtenus par la réunion disjointe de ceux comportant une noire, une rouge et une blanche, il y en a $\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1}$ et de ceux comportant une noire et deux rouges, il y en a $\binom{1}{1} \times \binom{9}{2}$.

Nombre de tirages favorables: $\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1} + \binom{1}{1} \times \binom{9}{2}$

$$\mathbf{P}(B) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1} + \binom{1}{1} \times \binom{9}{2}}{\binom{15}{3}}$$

(c) C : "Les trois boules tirées sont de la même couleur"

Ce sont soit trois blanches : $\binom{5}{3}$ tirages, soit trois rouges : $\binom{9}{3}$ tirages.

$$\mathbf{P}(C) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}$$

2. On suppose maintenant que les tirages s'effectuent successivement, avec remise.

Soit $\Omega = [1, 15]^3$, muni de la probabilité uniforme.

(a) A : "Le tirage est tricolore"

Nombre de tirages possibles: 15^3 et tous les tirages sont équiprobables.

Nombre de tirages favorables:

Pour $i = 1, 2$ ou 3 , notons N_i , resp. B_i, R_i l'évènement "on obtient une boule noire, resp. blanche, rouge au i -ième tirage".

Les tirages favorables sont les tirages $(N_1 \cap B_2 \cap R_3) \cup (N_1 \cap B_3 \cap R_2) \cup (B_1 \cap N_2 \cap R_3) \cup (B_1 \cap N_3 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap B_3 \cap R_2)$.

Ces 6 évènements sont 2 à 2 incompatibles et chacun est composé d'évènements mutuellement indépendants donc occurant $\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1}$ fois.

Le nombre de tirages favorables est donc $6 \times 1 \times 5 \times 9$. Donc :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6 \times 1 \times 5 \times 9}{15^3} = \dots$$

(b) B : "Parmi les trois boules, il y a une noire et au moins une rouge".

Les tirages favorables sont

$N_1 \cap B_2 \cap R_3$ et six tirages équivalents (différant par l'ordre d'appartition des boules)

$N_1 \cap R_2 \cap R_3$ et trois tirages équivalents (différant par l'ordre d'apparition de la boule noire).

Le nombre de tirages favorables est donc $6 \times \binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1} + 3 \times \binom{1}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{9}{1}$

$$\mathbf{P}(B) = \frac{6 \times \binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1} + 3 \times \binom{1}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{9}{1}}{15^3} = \frac{19}{225}$$

(c) C : "Les trois boules tirées sont de la même couleur"

Les cas favorables sont $(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ au nombre de $1 \times 1 \times 1 + 5 \times 5 \times 5 + 9 \times 9 \times 9$.

$$\mathbf{P}(C) = \frac{1 \times 1 \times 1 + 5 \times 5 \times 5 + 9 \times 9 \times 9}{15^3}$$

Exercice 12 Une main est composée de 5 cartes prises simultanément dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne exactement :

(a) deux dix (une paire de dix)

(b) trois rois (un brelan de rois)

(c) trois dames et deux sept (un full aux dames par les sept)

2. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne au plus :

(a) deux dix (une paire de dix)

(b) trois rois (un brelan de rois)

Corrigé :

1. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne exactement :

(a) deux dix (une paire de dix)

Nombre de mains : $\binom{32}{5}$ et toutes les mains sont équiprobables (i.e. l'univers sous-jacent est muni de la probabilité uniforme)

Les mains favorables sont obtenues en choisissant 2 dix parmi les quatre dix, puis 3 cartes parmi les 28 cartes restantes (puisque l'on ne veut plus de dix).

Il y en a donc $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$.

$$p = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}$$

(b) trois rois (un brelan de rois)

Les mains favorables sont obtenues en choisissant 3 rois parmi les quatre rois, puis 2 cartes parmi les 28 cartes restantes.

Il y en a donc $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$.

$$p = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$$

(c) trois dames et deux sept (un full aux dames par les sept)

Les mains favorables sont obtenues en choisissant 3 dames parmi les quatre dames, puis 2 sept parmi les 4 sept.

Il y en a donc $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$.

$$p = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}$$

2. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne au plus :

(a) deux dix (une paire de dix)

Il y a $\binom{28}{5}$ mains contenant 0 dix, $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$ mains contenant 1 dix et $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$ mains contenant 2 dix, donc le nombre de mains favorables est $\binom{28}{5} + \binom{4}{1} \times \binom{28}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$.

$$p = \frac{\binom{28}{5} + \binom{4}{1} \times \binom{28}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}$$

(b) trois rois (un brelan de rois)

Il y a $\binom{28}{5}$ mains contenant 0 roi, $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$ mains contenant 1 roi, $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$ mains contenant 2 rois, et $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$ mains contenant 3 rois, donc le nombre de mains favorables est $\binom{28}{5} + \binom{4}{1} \times \binom{28}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$.

$$p = \frac{\binom{28}{5} + \binom{4}{1} \times \binom{28}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$$

Mieux : ce sont toutes les mains ne contenant pas 4 rois!

$$p = 1 - \frac{\binom{4}{4} \times \binom{28}{1}}{\binom{32}{5}}$$

Exercice 13 *Le QCM : on suppose qu'il y a 8 questions et que le candidat a le choix entre 4 réponses pour chaque question. Le candidat répond au hasard.*

1.a.: Pour chaque question, quelle est la probabilité qu'il donne la réponse correcte?

1.b. : Quelle est la probabilité qu'il donne la réponse correcte à 5 questions exactement? à 6 questions exactement?

1.c. : Pour réussir l'examen, on lui demande de répondre au moins à 5 questions. Quelle est la probabilité qu'il réussisse l'examen?

2: Reprendre la dernière question en supposant que le candidat connaît la réponse à trois des questions posées.

Corrigé :

1.a.: Pour chaque question, quelle est la probabilité qu'il donne la réponse correcte?

Une chance sur 4.

1.b. : Quelle est la probabilité qu'il donne la réponse correcte à 5 questions exactement? à 6 questions exactement?

Pour avoir un univers avec équiprobabilité, il faut considérer $\Omega = \{1, 4\}^8$. Alors $|\Omega| = 4^8$.

Le nombre de choix (ie d'événements élémentaires) correspondant à exactement 5 réponses correctes est obtenu en choisissant les cinq questions auxquelles l'élève donne des réponses correctes parmi les huit questions, puis pour les trois questions restantes, en choisissant l'une des trois mauvaises réponses, soit $\binom{8}{5} \times 3^3$ choix favorables. Donc :

$$p = \frac{\binom{8}{5} \times 3^3}{4^8}$$

Pour exactement 6 questions, la probabilité est :

$$p = \frac{\binom{8}{6} \times 3^2}{4^8}$$

Ou : il s'agit de compter le nombre de succès dans la répétition de 8 expériences indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$; donc le nombre de bonnes réponses suit une loi binomiale de paramètres $\left(8, \frac{1}{4}\right)$.

1.c. : Pour réussir l'examen, on lui demande de répondre au moins à 5 questions. Quelle est la probabilité qu'il réussisse l'examen?

On ajoute des probabilités correspondants aux événements incompatibles "répondre à i questions exactement" avec $i = 5, 6, 7, 8$.

$$p = \frac{\binom{8}{5} \times 3^3 + \binom{8}{6} \times 3^2 + \binom{8}{7} \times 3^1 + \binom{8}{8}}{4^8}$$

2: Reprendre la dernière question en supposant que le candidat connaît la réponse à trois des questions posées.

La condition pour qu'il réussisse l'examen est à présent qu'il donne au hasard la bonne réponse à au moins 2 questions sur 5. Donc :

$$p = \frac{\binom{5}{2} \times 3^3 + \binom{5}{3} \times 3^2 + \binom{5}{4} \times 3^1 + \binom{5}{5}}{11 \times 4^5}$$

Exercice 14 La classe comporte 40 élèves. Calculer la probabilité que au moins deux élèves aient la même date d'anniversaire (on considérera qu'il n'y a que 365 jours pas an et que toutes les dates de naissances sont équiprobables).

Corrigé :

On va chercher plutôt la probabilité que tous les élèves aient des dates d'anniversaire différentes. Pour cela, il faut choisir une liste de 40 dates différentes parmi 365. Il y en a \mathbf{A}_{365}^{40} parmi les 365^{40} listes possibles et équiprobables.

La probabilité cherchée est donc

$$p = 1 - \frac{\mathbf{A}_{365}^{40}}{365^{40}} \simeq 0.88$$

Exercice 15 On considère n personnes I_1, I_2, \dots, I_n . I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non" et la transmet à I_2 , puis I_2 la transmet à I_3 , etc. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information transmise par I_n soit celle reçue par I_1 (on établira une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}).

2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini?

Corrigé : 1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information transmise par I_n soit celle reçue par I_1 (on établira une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}).

Notons V_n l'évènement " I_n transmet l'information reçue par I_1 ".

V_n et \overline{V}_n forment un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(V_{n+1}) = P_{V_n}(V_{n+1})P(V_n) + P_{\overline{V}_n}(V_{n+1})P(\overline{V}_n) \\ &= pp_n + (1-p)(1-p_n) \\ &= (2p-1)p_n + 1-p \end{aligned}$$

C'est une suite arithmético-géométrique de point fixe c tel que $c = (2p-1)c + 1-p$ donc $c = \frac{1}{2}$ donc en posant $v_n = p_n - c$, donc (à détailler) la suite $\left(p_n - \frac{1}{2}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison $(2p-1)$ donc :

$$p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$$

Or $p_1 = p$ donc :

$$p_n = (2p-1)^{n-1} (p-1) + \frac{1}{2}$$

2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini?

$0 < p < 1$ donc $-1 < 2p-1 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2p-1)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$. A l'infini, quelle que soit la réponse juste, la réponse transmise a autant de chances d'être oui que non.

Exercice 16 Un grenouille se déplace sur les sommets A, B, C d'un triangle.

Si à l'instant n , elle est en A (resp. C), à l'instant $n + 1$, elle restera sur place avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sera en B avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Si à l'instant n , elle est en B , à l'instant $n + 1$, elle restera sur place avec la probabilité $\frac{1}{2}$, elle sera en A avec probabilité $\frac{1}{4}$ et en C avec probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n, c_n les probabilités que la grenouille se trouve en A, B, C à l'instant n .

1. Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de a_{n-1}, b_{n-1} et c_{n-1} .
2. On suppose $b_0 = \frac{1}{2}$. Que vaut $a_n + b_n + c_n$ pour $n \in \mathbb{N}$? En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, c_0 et n .

Corrigé :

Si à l'instant n , elle est en B , à l'instant $n + 1$, elle restera sur place avec la probabilité $\frac{1}{2}$, elle sera en A avec probabilité $\frac{1}{4}$ et en C avec probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n, c_n les probabilités que la grenouille se trouve en A, B, C à l'instant n .

1. Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de a_{n-1}, b_{n-1} et c_{n-1} .

Notons A_n , resp. B_n, C_n les évènements "la grenouille est en A (resp. B, C) à l'instant n ."

A_{n-1}, B_{n-1} et C_{n-1} forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales, on a pour $n \geq 1$:

$$a_n = p(A_n) = p_{|A_{n-1}}(A_n) \times p(A_{n-1}) + p_{|B_{n-1}}(A_n) \times p(B_{n-1}) + p_{|C_{n-1}}(A_n) \times p(C_{n-1}).$$

Donc :

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n &= \frac{1}{4}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \end{aligned}$$

2. Que vaut $a_n + b_n + c_n$ pour $n \in \mathbb{N}$? En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0 et n .

Pour tout n , (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'évènements donc $a_n + b_n + c_n = 1$ pour $n \geq 1$

$$\text{donc } b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) = \frac{1}{2}, \text{ vrai aussi pour } n = 0 \text{ car } b_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{8} \text{ et } c_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}c_{n-1}.$$

$$\text{Cherchons les points fixes : } c = \frac{1}{2}c + \frac{1}{8} \text{ et } c' = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}c' \text{ donc } c = \frac{1}{4} \text{ et } c' = \frac{1}{4}.$$

Les suites $\left(a_n - \frac{1}{4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(c_n - \frac{1}{4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$, donc :

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} \left(a_0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} \left(c_0 - \frac{1}{4}\right)$$

Exercice 17 Pour venir au lycée, j'ai le choix entre deux lignes de métro, la 12 et la 13. La ligne 12 (resp. la 13) a une probabilité $a \in]0, 1[$ (resp. $b \in]0, 1[$) d'être en retard.

Le premier jour, je prends au hasard une des deux lignes. Par la suite, j'utilise la même ligne que la veille si celle-ci était à l'heure, sinon, j'en change.

On note A_k l'évènement "je prend la ligne 12 le k -ième jour", $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $P(A_k)$ en fonction de k, a et b .
2. Quelle est la probabilité p_k que la ligne empruntée le k -ième jour soit à l'heure?
3. Que dire de p_k lorsque k tend vers l'infini?
4. Calculer la probabilité que j'ai pris la ligne 12 le k -ième jour sachant que je suis à l'heure.

Corrigé :

1. Calculer $P(A_k)$ en fonction de k, a et b .

Notons $a_k = P(A_k)$.

$(A_k, \overline{A_k})$ est un SCE donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{k+1}) = P_{A_k}(A_{k+1})P(A_k) + P_{\overline{A_k}}(A_{k+1})P(\overline{A_k})$$

donc

$$a_{k+1} = b(1 - a_k) + (1 - a)a_k = a_k(1 - a - b) + b$$

Le point fixe c vérifie $c = c(1 - a - b) + b$ donc $c = \frac{b}{a + b}$ donc $a_k - \frac{b}{a + b} = (1 - a - b)^{k-1} \left(a_1 - \frac{b}{a + b}\right)$.

Or $a_1 = \frac{1}{2}$ donc :

$$a_k = (1 - a - b)^{k-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{a + b}\right) + \frac{b}{a + b}$$

2. Quelle est la probabilité p_k que la ligne empruntée le k -ième jour soit à l'heure?

Notons R_k l'évènement "je suis en retard le k -ième jour".

$$p_k = P(\overline{R_k}) = P_{A_k}(\overline{R_k})P(A_k) + P_{\overline{A_k}}(\overline{R_k})P(\overline{A_k})$$

$$= (1 - a)a_k + (1 - b)(1 - a_k) = a_k(b - a) + 1 - b$$

donc :

$$p_k = (b - a) \left((1 - a - b)^{k-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{a + b} \right) + \frac{b}{a + b} \right) + 1 - b$$

3. Que dire de p_k lorsque k tend vers l'infini?

On a $0 < a + b < 2$ donc $-2 < -a - b < 0$ donc $1 - a - b \in]-1, 1[$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - a - b)^{k-1} = 0$

donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = (b - a) \frac{b}{a + b} + 1 - b = \frac{b^2 - ab - ab - b^2}{a + b} + 1 = 1 - \frac{2ab}{a + b}$.

4. Calculer la probabilité que j'ai pris la ligne 12 le k -ième jour sachant que je suis à l'heure.
D'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{R_k}}(A_k) = \frac{P_{A_k}(\overline{R_k}) \cdot P(A_k)}{P(\overline{R_k})} = \frac{(1-a) a_k}{p_k} = \dots$$

Exercice 18 On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant des boules rouges et noires. U_1 contient 2 boules rouges et 3 noires, U_2 contient 1 rouges et 4 noires et U_3 3 rouges et 4 noires.

1. On choisit une urne au hasard et on y prélève une boule au hasard.
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge?
 - (b) La boule retirée est rouge. Quelle est la probabilité de l'avoir prélevée dans U_1 ?
2. On tire au hasard une boule dans U_1 et une dans U_2 . On les met dans U_3 puis on tire au hasard une boule dans U_3 .
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge de U_3 ?
 - (b) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient toutes rouges?
 - (c) La boule piochée dans U_3 est rouge. Quelle est la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit noire?

Corrigé :

1. On choisit une urne au hasard et on y prélève une boule au hasard.

(a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge?

Notons R l'évènement "on tire une boule rouge" et T_i l'évènement "on choisit l'urne i ", pour $i = 1, 2, 3$.

(T_1, T_2, T_3) est un système complet d'évènements de probabilités non nulles ($\frac{1}{3}$ chacune). D'après la formule des probabilités totales, on a : $p(R) = p_{T_1}(R) p(T_1) + p_{T_2}(R) p(T_2) + p_{T_3}(R) p(T_3)$ donc :

$$p(R) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{7} \right) = \frac{136}{335} = \frac{12}{35}$$

(b) La boule retirée est rouge. Quelle est la probabilité de l'avoir prélevée dans U_1 ?

D'après la formule de Bayes, on a :

$$p_R(T_1) = \frac{p_{T_1}(R) p(T_1)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{2}{5} \frac{1}{3}}{\frac{12}{35}} = \frac{2/5}{36/35} = \frac{7}{18}$$

2. On tire au hasard une boule dans U_1 et une dans U_2 . On les met dans U_3 puis on tire au hasard une boule dans U_3 .

(a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge de U_3 ?

Notons R_i , resp. N_i pour $i = 1, 2, 3$ les évènements "on a tiré une boule rouge, resp. noire dans l'urne i ". On a $(R_1 R_2, R_1 N_2, N_1 R_2, N_1 N_2)$ est un SCE de probas non nulles donc

$$p(R_3) = p(R_3 | R_1 \cap R_2) p(R_1 \cap R_2) + p(R_3 | R_1 \cap N_2) p(R_1 \cap N_2) + p(R_3 | N_1 \cap R_2) p(N_1 \cap R_2) + p(R_3 | N_1 \cap N_2) p(N_1 \cap N_2)$$

$$= \frac{5}{9} \frac{2}{5} \frac{1}{5} + \frac{4}{9} \frac{2}{5} \frac{4}{5} + \frac{4}{9} \frac{3}{5} \frac{1}{5} + \frac{3}{9} \frac{3}{5} \frac{4}{5} = \frac{10 + 32 + 12 + 36}{225} = \frac{90}{225} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

(b) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient toutes rouges?

$$p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(R_3 | R_1 \cap R_2)p(R_1 \cap R_2) = p(R_3 | R_1 \cap R_2)p(R_1)p(R_2) = \frac{5}{9} \frac{2}{5} \frac{1}{5} = \frac{2}{45}.$$

(c) La boule piochée dans U_3 est rouge. Quelle est la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit noire?

(N_1, R_1) est un système complet d'évènements, donc d'après la formule de Bayes :

$$p(N_1 | R_3) = \frac{p(R_3 | N_1)p(N_1)}{p(R_3)}$$

De plus, $p(R_3 | N_1) = p_{N_1}(R_3 \cap N_2) + p_{N_1}(R_3 \cap R_2) = p_{N_1 \cap N_2}(R_3)p_{N_1}(N_2) + p_{N_1 \cap R_2}(R_3)p_{N_1}(R_2)$ car il est clair que $(p_{N_1})_{N_2} = p_{N_1 \cap N_2}$ et idem avec R_2 . De plus, $p_{N_1}(N_2) = p(N_2)$ et $p_{N_1}(R_2) = p(R_2)$. Donc :

$$p(R_3 | N_1) = p(R_3 | N_1 \cap N_2)p(N_2) + p(R_3 | N_1 \cap R_2)p(R_2) = \frac{3}{9} \frac{4}{5} + \frac{4}{9} \frac{1}{5} = \frac{16}{45}$$

De même,

$$p(R_3 | R_1) = p(R_3 | R_1 \cap N_2)p(N_2) + p(R_3 | R_1 \cap R_2)p(R_2) = \frac{4}{9} \frac{4}{5} + \frac{5}{9} \frac{1}{5} = \frac{21}{45}$$

Ainsi :

$$p(N_1 | R_3) = \frac{16/45 \times 3/5}{16/45 \times 3/5 + 21/45 \times 2/5} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois *Pile*?
2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, *Face* ne soit jamais suivi de *Pile*?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement A : "La séquence *Pile Face* apparaît au moins une fois au cours des n lancers"?
4. Soit B l'évènement: "La séquence *Pile Face* apparaît pour la première fois aux lancers $n - 1$ et n ($2 \leq k \leq n$). Calculer $P(B)$
- 5 Soit B_k l'évènement: "La séquence *Pile Face* apparaît pour la première fois aux lancers $k - 1$ et k ($2 \leq k \leq n$). Calculer $P(B_k)$

Corrigé :

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois *Pile*?

La probabilité d'obtenir *Face* à tous les lancers est p^n car cet événement peut s'écrire $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ et que ces événements sont mutuellement indépendants (car les lancers le sont) et tous de probabilité p .

La probabilité d'obtenir au moins une fois *Pile* est donc $1 - p^n$.

2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, *Face* ne soit jamais suivi de *Pile*?

L'évènement "au cours de ces n lancers, *Face* n'est jamais suivi de *Pile*" est la réunion des évènements deux à deux incompatibles "on obtient k *Pile* suivis de $n - k$ *Face*" pour $k = 0, \dots, n$. La

probabilité correspondante est donc $\sum_{k=0}^n (1-p)^k p^{n-k} = p^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{q}{p}\right)^k = p^n \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{q}{p}} = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$

sauf si $p = q$ auquel cas la probabilité est $\frac{n+1}{2^n}$.

3. Quelle est la probabilité de l'évènement A : "La séquence *Pile Face* apparaît au moins une fois au cours des n lancers"?

La probabilité que la séquence *Pile Face* n'apparaisse jamais est $\sum_{k=0}^n p^k q^{n-k}$ (même raisonnement qu'en 2).

$$\text{Donc } P(A) = 1 - \sum_{k=0}^n p^k q^{n-k}.$$

4. Soit B l'évènement: "La séquence *Pile Face* apparaît pour la première fois aux lancers $n - 1$ et n ($2 \leq k \leq n$)". Calculer $P(B)$.

Soit A' : "La séquence *Pile Face* apparaît au moins une fois lors des $n - 1$ premiers lancers".

$B = A - A'$ et $A' \subset A$ donc

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) - P(A') = 1 - \sum_{k=0}^n p^k q^{n-k} - \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k q^{n-1-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^k q^{n-1-k} - \sum_{k=0}^n p^k q^{n-k} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{n-1} p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} p^k q^{n-k} - p^n \\ &= \left(\frac{1}{q} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} p^k q^{n-k} - p^n \end{aligned}$$

5 Soit B_k l'évènement: "La séquence *Pile Face* apparaît pour la première fois aux lancers $k - 1$ et k ($2 \leq k \leq n$). Calculer $P(B_k)$
Remplacer n par k dans le résultat ci-dessus (peu importe le résultat des $n - k$ derniers lancers).

Exercice 20

1 On jette un dé n fois de suite.

1a Calculer la probabilité p_n d'obtenir 6 au moins une fois.

1b Trouver n tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$.

2 On jette deux dés n fois de suite. Calculer la probabilité q_n d'obtenir au moins une fois le double 6.

3 On jette un dé n fois de suite ($n \geq 2$). Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois deux 6 consécutivement.

Corrigé :

(a) Calculer la probabilité p_n d'obtenir 6 au moins une fois.

Evenement contraire est ne pas obtenir de 6. Il y a equiprobabilité sur $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^n$. Les cas favorables de l'évènement contraire sont au nombre de 5^n donc :

$$p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(b) Trouver n tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$.

$$p_n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln(5/6)} \Leftrightarrow n \geq 4.$$

2. On jette deux dés n fois de suite. Calculer la probabilité q_n d'obtenir au moins une fois le double 6.

Notons A_k : "on obtient un double 6 au k -ième lancer" et A l'évènement "on obtient au moins une fois le double 6".

Il est évident que $p(\overline{A_k}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ et que $\overline{A} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$ et que les évènements $\overline{A_k}$ sont indépendants dans leur ensemble donc $p(\overline{A}) = \prod_{k=1}^n p(\overline{A_k}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$ donc $p(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$.

3. On jette un dé n fois de suite ($n \geq 2$). Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois deux 6 consécutivement.

Conditionnons en fonction du premier lancer

Notons A_k : "on obtient au moins une fois deux 6 consécutivement lors des k premiers lancers" et B_k : "on obtient 6 au k -ième lancer" et $q_k = p(A_k)$

Par les probas totales et le SCE $(B_n, \overline{B_n})$ on a :

$$q_n = p(A_n \cap B_n) + p(A_n \cap \overline{B_n})$$

Il est clair que $p(A_n \cap \overline{B_n}) = p(A_{n-1} \cap \overline{B_n}) = \frac{5}{6}p(A_{n-1})$ par indépendance du n -ième lancer par rapport aux précédents. Donc $p(A_n \cap \overline{B_n}) = \frac{5}{6}q_{n-1}$

D'autre part le SCE $(B_{n-1}, \overline{B_{n-1}})$ donne cette fois avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(A_n \cap B_n) &= p(A_n \cap B_n \cap B_{n-1}) + p(A_n \cap B_n \cap \overline{B_{n-1}}) \\ &= p(B_n \cap B_{n-1}) + p(A_{n-2} \cap B_n \cap \overline{B_{n-1}}) \\ &= p(B_n \cap B_{n-1}) + \frac{1}{6} \frac{5}{6} p(A_{n-2}) \text{ (indépendance mutuelle)} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{5}{36} q_{n-2} \end{aligned}$$

donc :

$$q_n = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} q_{n-2} + \frac{5}{6} q_{n-1}$$

$l = \frac{1}{36} + \frac{5}{36}l + \frac{5}{6}l \Leftrightarrow l = 1$, on pose $v_n = q_n - 1$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{36} + \frac{5}{36} q_{n-2} + \frac{5}{6} q_{n-1} - \left(\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{6} \right) \\ &= \frac{5}{36} v_{n-2} + \frac{5}{6} v_{n-1} \end{aligned}$$

$$r^2 - \frac{5}{6}r - \frac{5}{36} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{12} \quad (\Delta = \frac{45}{36}) \text{ d'où } v_n = \lambda \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{12} \right)^n + \mu \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{12} \right)^n$$

et $q_2 = \frac{1}{36}$ et $q_3 = \frac{1}{36} + \frac{5}{6} \frac{1}{36}$ etc...

On peut calculer $q_1 = 0$ et $q_0 = 0$ d'où v_0 et v_1 d'où λ et μ .

Exercice 21 On considère un dé à six faces, éventuellement pipé. On le lance deux fois. Montrer que la probabilité d'obtenir un double est au moins $\frac{1}{6}$ et préciser dans quel cas il y a égalité.

Corrigé : Notons A_i l'évènement "obtenir un double i " et A l'évènement "obtenir un double".
 Notons aussi p_i la probabilité d'obtenir i lors d'un lancer (quelconque) du dé. On a bien sûr $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

D'autre part on a $A = \bigcup_{i=1}^6 A_i$ et les A_i sont deux à deux incompatibles donc

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 P(A_i) = \sum_{i=1}^6 p_i^2$$

car les deux lancers sont indépendants de sorte que $P(A_i) = p_i^2$.

Posons à présent $\vec{u} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^6 muni du produit scalaire usuel, on a :

$$|(\vec{u} | \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

donc

$$1 = \sum_{i=1}^6 p_i \leq \sqrt{6} \sqrt{\sum_{i=1}^6 p_i^2}$$

donc $\sum_{i=1}^6 p_i^2 \geq \frac{1}{6}$ avec égalité si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, ie si et seulement si $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ nécessairement égal à $\frac{1}{6}$ car la somme vaut 1. La condition d'égalité est donc que le dé soit non pipé.

Exercice 22 On considère des mains de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Comparer les deux probabilités suivantes :

- probabilité d'avoir exactement deux as sachant que la main contient au moins un as.
- probabilité d'avoir exactement deux as sachant que la main contient l'as de carreau.

Exercice 23 Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A_1, \dots, A_n n évènements. Montrer que parmi tous les évènements de la forme $B_1 \cup \dots \cup B_n$ telles que pour tout i , $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, il en existe au moins un de probabilité au moins $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

Corrigé : Il y a 2^n évènements du type $B_1 \cup \dots \cup B_n$ avec pour tout i , $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que tous ces évènements sont de probabilité $P(B_1 \cup \dots \cup B_n) < \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Considérons leur complémentaires, de la forme $\overline{(B_1 \cup \dots \cup B_n)} = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}$ et on a donc pour tous ces évènements :

$$P(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}) = 1 - P(B_1 \cup \dots \cup B_n) > \frac{1}{2^n}$$

Ces évènements sont aussi au nombre de 2^n et ces derniers sont deux à deux incompatibles car deux évènements de ce type différents font apparaître pour l'un des indices, disons j , l'un A_j et l'autre $\overline{A_j}$. Or il s'agit cette fois d'intersections, donc l'un est inclus dans $\overline{A_j}$ l'autre dans A_j , donc ils sont d'intersection vide, ie incompatibles. Donc :

$$P\left(\bigcup (\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n})\right) = \sum P((\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n})) > \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

puisque'il y a 2^n termes dans cette somme.

C'est absurde donc l'un des évènements de la forme $B_1 \cup \dots \cup B_n$ vérifie $P(B_1 \cup \dots \cup B_n) \geq 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

Exercice 24 On réalise une suite d'expérience : pour chaque entier $k \geq 1$, on note p_k la probabilité de succès de la k -ième expérience et on suppose que pour tout k , $p_k < \frac{1}{2}$.

On note S_n le nombre de succès lors des n premières expériences..

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(S_n \text{ est pair}) > \frac{1}{2}$

2. Que se passe-t-il dans le cas où il existe k tel que $p_k = \frac{1}{2}$?

Exercice 25 Jeu du "Monty Hall"

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le but du jeu est de gagner la voiture en ouvrant la bonne porte. Le candidat doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Les questions qui se posent au candidat sont : que doit-il faire ? quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Exercice 26 n passagers montent dans un avion comportant n places numérotées. Le premier passager a oublié le numéro de sa place et s'assied au hasard. Les passagers suivants ont bien leur ticket. Si leur place est libre, ils l'occupent. Dans le cas contraire, ils prennent une autre place au hasard. Quelle est la probabilité pour que le dernier passager s'assoit à sa place?