Chapitre 21 : Variables aléatoires sur un univers fini

Proposition 1 *Pour tous réels $a, , b, c, d,$ on a :* $Cov\left(aX+b, cY+d\right) = acCov\left(X, Y\right).$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
Cov\left(aX+b, cY+d\right) &= \mathbf{E}\left(\left(aX+b\right)\left(cY+d\right)\right) - \mathbf{E}\left(aX+b\right)\mathbf{E}\left(cY+d\right) \\
&= \mathbf{E}\left(acXY+adX+bcY+bd\right) - \left(a\mathbf{E}\left(X\right)+b\right)\left(c\mathbf{E}\left(Y\right)+d\right) \\
&= ac\mathbf{E}\left(XY\right)+ad\mathbf{E}\left(X\right)+bc\mathbf{E}\left(Y\right)+bd-ac\mathbf{E}\left(X\right)\mathbf{E}\left(Y\right) \\
&\quad -ad\mathbf{E}\left(X\right)-bc\mathbf{E}\left(Y\right)-bd \\
&= ac\left(\mathbf{E}\left(XY\right)-\mathbf{E}\left(X\right)\mathbf{E}\left(Y\right)\right) = acCov\left(X, Y\right).
\end{aligned}$$

Proposition 2 *Variance d'une somme : Soient $X_1, \ldots X_n$ des var sur $\left(\Omega, P\right)$. Alors :*

$$V\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right) = V\left(X_1\right)+V\left(X_2\right)+\cdots+V\left(X_n\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov\left(X_i, X_j\right)$$

Si de plus, les variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$ sont deux à deux décorrélées, alors :

$$V\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right) = V\left(X_1\right)+V\left(X_2\right)+\cdots+V\left(X_n\right)$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)^2\right) &= \mathbf{E}\left(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_iX_j\right) \\
&= \mathbf{E}\left(X_1^2\right)+\cdots+\mathbf{E}\left(X_n^2\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{E}\left(X_iX_j\right)
\end{aligned}$$

tandis que :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{E}\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)\right)^2 &= \left(\mathbf{E}\left(X_1\right)+\cdots+\mathbf{E}\left(X_n\right)\right)^2 \\
&= \left(\mathbf{E}\left(X_1\right)\right)^2+\cdots+\left(\mathbf{E}\left(X_n\right)\right)^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{E}\left(X_i\right)\mathbf{E}\left(X_j\right)
\end{aligned}$$

donc par la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}
V\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right) &= \mathbf{E}\left(X_1^2\right)+\cdots+\mathbf{E}\left(X_n^2\right)-\left(\left(\mathbf{E}\left(X_1\right)\right)^2+\cdots+\left(\mathbf{E}\left(X_n\right)\right)^2\right) \\
&\quad +2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\mathbf{E}\left(X_iX_j\right)-\mathbf{E}\left(X_i\right)\mathbf{E}\left(X_j\right)\right) \\
&= V\left(X_1\right)+\cdots+V\left(X_n\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov\left(X_i, X_j\right).
\end{aligned}$$

.0.1 Inégalité de Markov

Théorème 3 *Inégalité de Markov*
Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathbf{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{x} E(X)$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{y \in X(\Omega)} y\mathbf{P}(X = y) = \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y < x}} \underbrace{y\mathbf{P}(X = y)}_{\geq 0 \text{ car } X \geq 0} + \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geq x}} y\mathbf{P}(X = y) \geq \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geq x}} y\mathbf{P}(X = y) \\
&\geq \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geq x}} x\mathbf{P}(X = y) = x \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geq x}} \mathbf{P}(X = y) = x\mathbf{P}(X \geq x)
\end{aligned}$$

car $(X \geq x) = \bigcup_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \geq x}} (X = y)$, évènements 2 à 2 incompatibles, donc $\mathbf{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{x} E(X)$.

.0.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Théorème 4 *Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev*
Soit X une variable aléatoire réelle. Alors pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha^2}.$$

Preuve : Appliquer l'inégalité de Markov à $Y = |X - \mathbf{E}(X)|$ et à α^2.

.1 Loi binomiale.

Définition 5 Loi binomiale
Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$ *et* X *une variable aléatoire. On dit que* X *suit la loi binomiale de paramètres* (n,p) *si* $X(\Omega) = [|0,n|]$ *et si :*

$$\forall k \in [|0,n|], \ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque *La loi binomiale de paramètre* $(1,p)$ *est la loi de Bernouilli de paramètre* p.

Modélisation : La réalisation de n expériences aléatoires indépendantes est le cadre habituel pour l'obtention d'une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. En pratique, ce sont les conditions de l'expérience qui justifient que l'on considère des variables aléatoires données comme indépendantes.
On a ainsi :

Proposition 6 *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont les variables aléatoires mesurant le succès ou l'échec de* n *expériences indépendantes et si elles suivent la même loi* $\mathcal{B}(p)$, *alors la variable aléatoire* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *qui compte le nombre de succès dans ces* n *expériences suit la loi binomiale de paramètres* n *et* p : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Preuve : Soit une expérience aléatoire pouvant déboucher sur un succès avec la probabilité p et sur un échec avec la probabilité $q = 1-p$.
On répète cette expérience n fois. Toutes les expériences sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$.
Plus précisément, notons X_i le résultat de l'expérience numéro i. On a $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Posons $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. X est à valeurs dans $[|0,n|]$.
L'ensemble de ces résultats d'expériences peut être modélisé par $\{0,1\}^n$, c'est-à dire par l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ avec $x_i = 1$ si l'expérience numéro i est un succès et 0 sinon.
Pour $k \in [|0,n|]$, l'évènement $(X=k)$ est la réunion d'événements élémentaires constitués par les n-uplets dans lesquels k composantes sont égales à 1 et $n-k$ à 0.
Soit $A = \{(x_1, x_2, \ldots x_n)\}$ un tel événement élémentaire. Les expériences étant indépendantes, on a :

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod \mathbf{P}(X_i = x_i) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Tous ces événements élémentaires constituant l'événement $(X=k)$ ont la même probabilité, sont deux à deux incompatibles et il y a $\binom{n}{k}$ événements élémentaires de ce type dans $(X=k)$ donc :

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

donc $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque *Dans la pratique, on ne refait pas ce raisonnement et on doit reconnaitre un schéma de loi binomiale lorsqu'il apparaît.*

Remarque *On vérifie* $\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$

Exercice 7 *On lance deux dés équilibrés, on note* U_1 *et* U_2 *les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle* $X = \max(U_1, U_2)$ *et* $Y = \min(U_1, U_2)$.

1 *Déterminer la loi de* X *à l'aide de sa fonction de répartition (on donnera un tabeau explicite de la loi). Calculer ensuite l'espérance de* X.

2 *En considérant* $X+Y$, *calculer* $E(Y)$.

3 *Calculer* $E(XY)$. X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Corrigé :

1 *Pour* $k \in [|1,6|]$, *on a* $F_X(k) = P(X \leq k) = P((U_1 \leq k) \cap (U_2 \leq k)) = P(U_1 \leq k) P(U_2 \leq k)$ *par indépendance de* U_1 *et* U_2 *donc des événements* $(U_1 \leq k)$ *et* $(U_2 \leq k)$. *Donc :*

$$F_X(k) = \frac{k^2}{36}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_X(1) &= \frac{1}{36} \\ P_X(k) &= F_X(k) - F_X(k-1) = \frac{k^2-(k-1)^2}{36} \text{ pour } k \in [|2,6|] \end{aligned}$$

d'où :

k	1	2	3	4	5	6
$P_X(k)$	1/36	1/12	5/36	7/36	1/4	11/36

On a donc :

$$E(X) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36}$$

2 *On a* $X+Y = U_1+U_2$ *donc* $E(X)+E(Y) = E(U_1)+E(U_2) = \frac{7}{2}+\frac{7}{2} = 7$ *donc* $E(Y) = 7 - \frac{161}{36} = \frac{91}{36}$.

3 *On a de même* $XY = U_1U_2$ *donc* $E(XY) = E(U_1U_2) = E(U_1)E(U_2)$ *car* U_1 *et* U_2 *sont indépendantes. Donc* $E(XY) = \frac{49}{4}$. *On peut alors calculer la covariance de* X *et* Y *:*

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{49}{4} - \frac{161}{36}\frac{91}{36} = \frac{1225}{1296}$$

Les deux variables X *et* Y *ne sont donc pas indépendantes puisque leur covariance est non nulle.*

Exercice 8 *Dans cet exercice hors- programme, l'univers est infini (dénombrable) mais cela influe peu sur le raisonnement. Par contre on fait des sommes de séries géométriques dérivées, sans connaître les formules correspondantes...*
On tire successivement avec remise une boule dans une urne contenant 10 *boules noires et* 5 *boules blanches. On s'arrête dès que l'on a obtenu une boule blanche et une boule noire. On appelle* X *le nombre de tirages,* Y *le nombre de boules blanches tirées, et* Z *le nombre de boules noires tirées. Trouver les lois de* X, Y, Z *et la covariance de* Y *et* Z.

Corrigé : Le jeu s'arrête quand on a une succession de boules noires suivie d'une boule blanche ou inversement. Il y a au moins deux tirages. On note B_i (resp. N_i) l'événement "obtenir une boule blanche (resp. noire) au tirage i". On a $X(\Omega) = [|2, +\infty|[$. Pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P((B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap N_n) \cup (N_1 \cap \ldots \cap N_{n-1} \cap B_n)) \\ &= \left(\frac{5}{15}\right)^{n-1} \times \frac{10}{15} + \left(\frac{10}{15}\right)^{n-1} \times \frac{5}{15} \text{ (incompatibilité et indépendance)} \end{aligned}$$

donc $E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$, somme de deux séries absolument convergentes donc l'espérance est finie. (ce n'est pas toujours le cas avec un univers infini).
On calcule $E(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(2/3)^2} - 1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-(1/3)^2} - 1\right) = \frac{7}{2}$ et

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)+n) \left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{1-(2/3)^3}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{1-(1/3)^3} + E(X) = 17. \end{aligned}$$

Donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 17 - \frac{49}{4} = \frac{19}{4}$.
Les valeurs prises par Y et Z sont celles de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P((Y = 1) \cap (Z = 1)) + \sum_{k=2}^{+\infty} P((Y = 1) \cap (Z = k)) \\ &= P((B_1 \cap N_2)(N_1 \cap B_2)) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_1 \cap \ldots \cap N_k \cap B_{k+1}) \\ &= \frac{4}{9} + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-(2/3)} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

et pour tout $n \geq 2$:

$$P(Y = n) = P(B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap N_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d'où $E(Y) = \frac{8}{9} + \sum_{n=2}^{+\infty} n \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{7}{6}$
et

$$E\left(Y^2\right) = \frac{8}{9} + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{8}{9} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)+n) \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{2}$$

d'où $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{11}{36}$.
On procède de même pour Z : $P(Z=1) = \frac{5}{9}$ et pour $n \geq 2$, $P(Z=n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $E(Z) = \frac{7}{3}$, $E(Z^2) = \frac{31}{3}$ et $V(Z) = \frac{44}{9}$.
Enfin, on remarque que $X = Y + Z$ donc $V(X) = V(Y) + V(Z) + 2Cov(Y,Z)$ donc $Cov(Y,Z) = -\frac{2}{9}$.

T.D. 21 : Variables aléatoires sur un univers fini.

Exercice 9 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.*

1. *On effectue k tirages **sans** remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.*

2. *Même question si les tirages s'effectuent **avec** remise.*

Corrigé : 1. $X(\Omega) = \{k, \dots, n\}$

Ω est l'ensemble des combinaisons de k boules parmi n, avec équiprobabilité sur tous les tirages. On a $|\Omega| = \binom{n}{k}$.

Pour $j \in \{k, \dots, n\}$, $[X = j]$ est l'ensemble des combinaisons de k boules parmi n, contenant j et dont les autres numéros sont entre 1 et $j-1$. Donc $|[X = j]|$ est le nombre de façons de choisir $k-1$ éléments parmi $\{1, \dots, j-1\}$. Donc $|[X = j]| = \binom{j-1}{k-1}$. Donc pour tout j :

$$\mathbf{P}[X = j] = \frac{\binom{j-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

2. Même question si les tirages s'effectuent **avec** remise.

$X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$. On choisit $\Omega = \{1, \dots, n\}^k$ avec équiprobabilité et on a $|\Omega| = n^k$.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. $[X \leq j]$ est l'ensemble des tirages de k boules parmi les boules numérotées $\{1, \dots, j\}$ donc $|[X \leq j]| = j^k$. Donc $\mathbf{P}[X \leq j] = \dfrac{j^k}{n^k}$.

Or $[X \leq j] = [X = j] \cup [X \leq j-1]$ et ces deux événements sont incompatibles donc $\mathbf{P}[X = j] = \mathbf{P}[X \leq j] - \mathbf{P}[X \leq j-1]$.

Ainsi :

$$\mathbf{P}[X = j] = \frac{j^k}{n^k} - \frac{(j-1)^k}{n^k}.$$

Exercice 10 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{P}[X = k] = \lambda k$.*

Déterminer λ puis calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$. On admet $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Corrigé : On a par le SCE associé à X : $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}[X = k] = 1$ or $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{n} \lambda k = \lambda \dfrac{n(n+1)}{2}$

donc $\lambda = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

Donc $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{n} \lambda k^2 = \lambda \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{2n+1}{3}$.

D'après la formule de Huygens, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.

Donc par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}[X=k] - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda k^3 - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \frac{2}{n(n+1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \frac{9n^2+9n-8n^2-8n-2}{18} = \frac{n^2+n-2}{18}\end{aligned}$$

Exercice 11 *Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est blanche, on arrête. Si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par une boule blanche. On répète le protocole de tirage jusqu'à obtention d'une boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.*

1 *Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.*

On tire au moins une boule et on ne peut pas en tirer plus de r rouges donc au plus X prend la valeur $r+1$. Donc $X(\Omega) = [|1, r+1|]$.

2 *Donner la loi de X.*

Notons A_n l'événement "on tire une n ième boule et elle est rouge".

On a alors pour $k \in X(\Omega)$:

$$(X=k) = A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$$

donc par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(X=k) &= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \dots P\left(\overline{A_k} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}\right) \\ &= \frac{r}{r+b}\frac{r-1}{r+b}\cdots\frac{r-k+2}{r+b}\frac{b+k-1}{r+b} = \frac{r!\,(b+k-1)}{(r-k+1)!\,(r+b)^k}\end{aligned}$$

Exercice 12 *Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent et chacun d'eux passe un test. Le premier qui y satisfait est engagé et on arrête alors les tests. La probabilité qu'un candidat réussisse le test est $p \in \left]0,1\right[$. On définit la variable aléatoire X par :*
$X = j$ si le j-ième candidat est engagé ($1 \leq j \leq n$)
$X = n+1$ si aucun des candidats n'est engagé

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Déterminer n pour que la probabilité de recruter un nouveau cadre soit $> \frac{1}{2}$.*
3. *Déterminer la probabilité pour que le j-ième candidat soit recruté sachant qu'il y a un candidat recruté.*
4. *Chaque test coûte 100 Euros à l'entreprise. Quel est le coût moyen de l'opération? (on pourra remarquer qu'une somme du type $\sum jx^{j-1}$ se calcule en dérivant $\sum x^j$).*

Corrigé :

1. Déterminer la loi de X.
$X(\Omega) = [|1, n+1|]$.
Notons A_j :" j passe le test et réussit le test" et B_j :" j passe le test et échoue au test".
Attention : A_j et B_j ne sont pas contraires l'un de l'autre.
Par la formule des probabilités composées pour $j \leq n$:

$$\begin{aligned}
P(X=j) &= P(A_j) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{j-1} B_i\right) \cap A_j\right) \\
&= P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \ldots P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{j-2}}(B_{j-1}) P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}}(A_j) \\
&= (1-p)^{j-1} p
\end{aligned}$$

et pour $j = n+1$, $P(X = n+1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = (1-p)^n$.

Remarque : on a aussi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leq n) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X=j) = \sum_{j=1}^{n} p(1-p)^{j-1} \\
&= p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n
\end{aligned}$$

et $(X \leq n)$ et $(X = n+1)$ sont deux événements contraires donc $P(X = n+1) = 1 - P(X \leq n) = 1 - (1-(1-p)^n) = (1-p)^n$.

2. Déterminer n pour que la probabilité de recruter un nouveau cadre soit $> \frac{1}{2}$.
La probabilité de recruter un nouveau cadre est
donc $\mathbf{P}(X \leq n) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-p)^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow n\ln(1-p) < -\ln(2) \Leftrightarrow n > \frac{-\ln(2)}{\ln(1-p)}$ car $\ln(1-p) < 0$.

3. Déterminer la probabilité pour que le j-ième candidat soit recruté sachant qu'il y a un candidat recruté.

$$\mathbf{P}\left(X=j \mid X\leq n\right)=\frac{\mathbf{P}\left(\left(X=j\right)\cap\left(X\leq n\right)\right)}{\mathbf{P}\left(X\leq n\right)}=\frac{\mathbf{P}\left(X=j\right)}{\mathbf{P}\left(X\leq n\right)}=\frac{p\left(1-p\right)^{j-1}}{1-\left(1-p\right)^{n}}.$$

4. Chaque test coûte 100 Euros à l'entreprise. Quel est le coût moyen de l'opération? (on pourra remarquer qu'une somme du type $\sum jx^{j-1}$ se calcule en dérivant $\sum x^j$).

Soit Y la vad représentant le coût de l'opération. Si $X=j\leq n$, alors $Y=100j$ et si $X=n+1$, alors $Y=100n$.

Le coût moyen de l'opération est l'espérance de Y, et d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Y\right) &= \sum_{j=1}^{n}100j\times\mathbf{P}\left(X=j\right)+100n\times\mathbf{P}\left(X=n+1\right)=\sum_{j=1}^{n}100jp\left(1-p\right)^{j-1}+100n\times\left(1-\mathbf{P}\left(X\leq n\right)\right)\\ &= 100p\sum_{j=1}^{n}j\left(1-p\right)^{j-1}+100n\left(1-p\right)^{n}\end{aligned}$$

Pour $x\neq 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n}x^j=x\dfrac{1-x^n}{1-x}=\dfrac{x-x^{n+1}}{1-x}$ donc en dérivant $\sum\limits_{j=1}^{n}jx^{j-1}=\dfrac{\left(1-(n+1)x^n\right)\left(1-x\right)+\left(x-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2}$ $\dfrac{1-x^{n+1}-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}}{\left(1-x\right)^2}=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{\left(1-x\right)^2}$ donc avec $x=1-p$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Y\right) &= 100p\frac{1-\left(n+1\right)\left(1-p\right)^{n}+n\left(1-p\right)^{n+1}}{p^2}+100n\left(1-p\right)^{n}\\ &= \frac{100}{p}\left(1-n\left(1-p\right)^{n}-\left(1-p\right)^{n}+n\left(1-p\right)^{n+1}\right)+100n\left(1-p\right)^{n}\\ &= \frac{100}{p}\left(1-np\left(1-p\right)^{n}-\left(1-p\right)^{n}\right)+100n\left(1-p\right)^{n}\\ &= \frac{100}{p}\left(1-\left(1-p\right)^{n}\right)\end{aligned}$$

Exercice 13 *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$.*

1. *Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbf{P}[X = k] = \mathbf{P}[X \geq k] - \mathbf{P}[X \geq k+1]$.*
2. *Montrer que*
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}[X \geq k]$$

Corrigé :

1. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbf{P}[X = k] = \mathbf{P}[X \geq k] - \mathbf{P}[X \geq k+1]$.
On a $[X \geq k] = [X = k] \cup [X \geq k+1]$ et les deux événements sont incompatibles donc $\mathbf{P}[X \geq k] = \mathbf{P}[X = k] + \mathbf{P}[X \geq k+1]$ donc $\mathbf{P}[X \geq k] - \mathbf{P}[X \geq k+1] = \mathbf{P}[X = k]$.
2. Montrer que
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}[X \geq k]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{n} k\left(\mathbf{P}[X \geq k] - \mathbf{P}[X \geq k+1]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}[X \geq k] - \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}[X \geq k+1] = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}[X \geq k] - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\mathbf{P}[X \geq k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}[X \geq k] - \sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbf{P}[X \geq k] = \sum_{k=1}^{n} (k-k+1)\,\mathbf{P}[X \geq k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}[X \geq k]
\end{aligned}$$

Exercice 14 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \left]0, 1\right[$. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.*
Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Corrigé :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathbf{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)\,p}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(n+1)\,p}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} = \frac{1}{(n+1)\,p}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1}\right. \\
&= \frac{1}{(n+1)\,p}\left(1^{n+1} - (1-p)^{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)\,p}\left(1 - (1-p)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 15 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 3 boules : une blanche, une rouge et une verte. On effectue n tirages successifs avec remise. Si $i \in \{2, \ldots, n\}$, on dit qu'il y a changement de couleur au i-ième tirage si la i-ième boule tirée est d'une couleur différente de la $(i-1)$-ième boule. On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements de couleur intervenants au cours des n tirages.*
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Corrigé :

Tout d'abord, $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. A chaque tirage, il y a une probabilité $p = \dfrac{2}{3}$ qu'il y ait un changement de couleur. $X \sim \mathcal{B}(n-1, \frac{2}{3})$ car X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n-1$ épreuves de indépendantes suivant une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{2}{3}$/

Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Cherchons $P[X = k]$. L'ensemble des séquences de tirages donnant exactement k changements de couleur est réunion de $\binom{n-1}{k}$ sous-ensembles deux à deux disjoints obtenus en choisissant les k tirages (numérotés de 1 à n) où il y a changement de couleur. Chacun de ces sous-ensemble de séquences est réalisé avec une probabilité $p^k (1-p)^{n-1-k}$ puisque les changements de couleur se produisent avec une probabilité p et l es non-changements avec probabilité $1-p$. Ainsi $P[X = k] = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$.

On a donc $\mathbf{E}(X) = (n-1)p = \dfrac{2}{3}(n-1)$ et $\mathbf{V}(X) = (n-1)p(1-p) = \dfrac{2}{9}(n-1)$

Exercice 16 *On pose n questions à un candidat. Pour chaque question, il a une probabilité $p \in]0,1[$ de répondre correctement. Soit X le nombre de bonnes réponses fournies.*

1. *Quelle est la loi de X?*
2. *A chaque mauvaise réponse, on donne une seconde chance au candidat. Il a alors une probabilité $q \in]0,1[$ de fournir la bonne réponse. Soit Y le nombre de bonnes réponses fournies lors de ces secondes tentatives. Déterminer la loi de Y.*
3. *Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.*

Corrigé :

1 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ car chaque question se déroule de façon indépendante des autres avec une probabilité p de réussite.

2 Y compte le nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes où l'on considère à la question k, qu'un succès est l'événement "la candidat fournit une mauvaise première réponse puis une bonne réponse lors de la seconde chance". Chacune de ces expériences suit une loi de Bernouilli de paramètre $(1-p)\,q$.
Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $(n, (1-p)\,q)$.

3 Soit $m \in [|0, n|]$. Par probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Z = m) &= \sum_{k=0}^{m} P(X = k, Y = m-k) = \sum_{k=0}^{m} P(X = k)\, P(Y = m-k \mid X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{m-k} q^{m-k} (1-q)^{n-m} \end{aligned}$$

car par un raisonnement analogue à celui effectué pour trouver la loi binomiale, on a $P\left(Y=l \mid X=k\right)=\binom{n-k}{l}q^{l}\left(1-q\right)^{n-k-l}$ (il s'agit de compter le nombre de succès dans la répétition de $n-k$ expériences de Bernouilli indépendantes de même paramètre q).
Or

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\frac{n!}{k!\left(m-k\right)!\left(n-m\right)!}=\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P\left(Z=m\right) &= \binom{n}{m}\left(1-p\right)^{n}q^{m}\left(1-q\right)^{n-m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{p}{q\left(1-p\right)}\right)^{k}\\
&= \binom{n}{m}\left(1-p\right)^{n}q^{m}\left(1-q\right)^{n-m}\left(1+\frac{p}{q\left(1-p\right)}\right)^{m}\\
&= \binom{n}{m}\left(1-p\right)^{n-m}\left(1-q\right)^{n-m}\left(1-p\right)^{m}q^{m}\left(\frac{p+q-pq}{q\left(1-p\right)}\right)^{m}\\
&= \binom{n}{m}\left(1-\left(p+q-pq\right)\right)^{n-m}\left(p+q-pq\right)^{m}
\end{aligned}$$

donc $Z\sim\mathcal{B}\left(n,p+q-pq\right)$

Exercice 17 *On considère deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ contenant chacune $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) boules numérotées de 1 à $2n$. On prélève au hasard n boules dans $\mathcal{U}_1$ et n boules dans $\mathcal{U}_2$. Soit V la variable aléatoire égale au nombre de numéros communs aux deux prélèvements.*
Déterminer la loi de V, son espérance et sa variance.

Corrigé :

Déterminer la loi de V, son espérance et sa variance.
On a : $V(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et le nombre total de tirages (tous équiprobables) est $\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$.
Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ fixé. On cherche $\mathbf{P}(V = j)$.
Les tirages pour-lesquels $X = j$ sont obtenus en choisissant deux parties A et B de $\{1, \ldots, 2n\}$ (A les numéros prélevés dans $\mathcal{U}_1$ et B ceux dans $\mathcal{U}_2$) tels que $|A \cap B| = j$. On choisit d'abord $A \cap B$ dans $\{1, \ldots, 2n\}$, il y a $\binom{2n}{j}$ façons de le faire, puis les éléments de $A \setminus (A \cap B)$, il y a $\binom{2n-j}{n-j}$ façons de le faire, puis ceux de $B \setminus (A \cap B)$, il y a $\binom{n}{n-j}$ façons de le faire.

Donc $\mathbf{P}(V = j) = \dfrac{\binom{2n}{j}\binom{2n-j}{n-j}\binom{n}{n-j}}{\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}} = \dfrac{\binom{n}{j}^2}{\binom{2n}{n}}$ après simplification.

Autre méthode: on ne s'occupe pas du tirage dans $\mathcal{U}_1$. On considère juste n numéros fixés parmi les $2n$. La probabilité de trouver exactement j de ces numéros en tirant n boules dans $\mathcal{U}_2$ est $\dfrac{\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}}{\binom{2n}{n}}$, on trouve le même résultat.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(V) &= \sum_{j=0}^{n} j\mathbf{P}(V = j) = \sum_{j=0}^{n} j\frac{\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\binom{n}{n-j} = \frac{n}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\binom{n}{n-1-j} \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{n}}\binom{2n-1}{n-1} \text{ d'après la formule de Vandermonde} \\
&= \frac{n}{2} \text{ après simplification.}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(V^2\right) &= \sum_{j=0}^{n} j^2\mathbf{P}(V = j) = \sum_{j=0}^{n} j^2\frac{\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=1}^{n} j^2\binom{n}{j}\binom{n}{j} \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=1}^{n} n^2\binom{n-1}{j-1}^2 = \frac{n^2}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}^2 \\
&= \frac{n^2}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\binom{n-1}{n-1-j} \\
&= \frac{n^2}{\binom{2n}{n}}\binom{2n-2}{n-1} \text{ (formule de Vandermonde)} \\
&= \frac{n^2}{2n\,(2n-1)}n^2 = \frac{n^3}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

donc avec la formule de Huygens :

$$\mathbf{V}(V) = \mathbf{E}\left(V^2\right) - (\mathbf{E}(V))^2 = \frac{n^3}{2(2n-1)} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4(2n-1)}$$

Exercice 18 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules dont 1 rouge et $n-1$ blanches. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la boule rouge. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.*
Déterminer les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.

Corrigé :

On a $T(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, évaluons $\mathbf{P}[T = j]$.

On remarque que $\mathbf{P}[T = j] = \mathbf{P}[T = j \mid T \geq j] \times \mathbf{P}[T \geq j]$ et que $\mathbf{P}[T = j \mid T \geq j] = \dfrac{1}{n-j+1}$.

Enfin, l'évènement $T \geq j$ correspond au tirage de $j-1$ boules blanches dans l'urne donc $\mathbf{P}[T \geq j] = \dfrac{\binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j-1}}$.

Donc :

$$\mathbf{P}[T = j] = \frac{1}{n-j+1} \frac{\binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j-1}} = \frac{1}{n} \text{ après simplification.}$$

Mieux : notons B_i l'événement obtenir une boule blanche au tirage i. Alors $[T = j] = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{j-1} \cap \overline{B_j}$ et ces événements n'étant pas indépendants, on applique les probabilités composées et on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[T = j] &= \mathbf{P}[B_1]\, \mathbf{P}[B_2 \mid B_1] \cdots \mathbf{P}[B_{j-1} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{j-2}]\, \mathbf{P}\left[\overline{B_j} \mid B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}\right] \\ &= \frac{n-1}{n} . \frac{n-2}{n-1} . \cdots . \frac{n-j+1}{n-j+2} . \frac{1}{n-j+1} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Donc $T \sim \mathcal{U}([1, n])$ donc $\mathbf{E}(T) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(T) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Exercice 19 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur* $[|1,n|]$.

1 *Déterminer* $P(X=Y)$.

2 *Déterminer* $P(X \geq Y)$

3 *Déterminer la loi de* $X+Y$.

Corrigé :

1 *On a* $(X=Y) = \bigcup_{k=1}^{n} (X=k, Y=k)$ *et ces événements ont 2 à 2 incompatibles donc :*

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k \cap Y=k) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=k) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

2 *On peut suivre une méthode similaire en distinguant tous les cas pour lesquels $X \geq Y$. On peut aussi remarquer que par symétrie du rôle de X et Y, on a $P(X \geq Y) = P(Y \geq X)$. Or :*

$$\begin{aligned} 1 &= P((X \geq Y) \cup (Y \geq X)) = P(X \geq Y) + P(Y \geq X) - P((X \geq Y) \cap (Y \geq X)) \\ &= 2P(X \geq Y) - P(X=Y) \end{aligned}$$

donc

$$P(X \geq Y) = \frac{1+1/n}{2}.$$

3 $X+Y$ *est clairement à valeurs dans* $[|2,2n|]$.

Soit $k \in [|1,2n|]$. On a $(X+Y=k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (X=i, Y=k-i)$ et ces événements ont 2 à 2 incompatibles donc :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X=i) \cap (Y=k-i)) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)\, P(Y=k-i)$$

toujours par indépendance de X et Y.
Mais k peut être plus grand que n et certaines des probabilités dans cette somme peuvent être nulles. Il faut distinguer selon $k \leq n$ ou $k > n$:

- *Si $k \leq n$ alors $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k-i \leq n$ donc $P(X=i) = \frac{1}{n}$ et $P(Y=k-i) = \frac{1}{n}$ donc :*

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$$

- *Si* $k > n$ *alors* $k-1 \geq n$ *et* $P(X=i) = 0$ *dès que* $i > n$ *donc* $P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i)\, P(Y=k-i)$.
  On a aussi $P(Y=k-i) = 0$ *pour* $k-i > n$ *ie pour* $i < k-n$ *donc* $P(X+Y=k) = \sum_{i=k-n}^{n} P(X=i)\, P(Y=k-i)$.
  Pour les valeurs de i *dans cette dernière somme on a bien* $P(X=i) = P(Y=k-i) = \frac{1}{n}$ *donc*

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{2n+1-k}{n^2}.$$

Exercice 20 *Fonction génératrice*
Pour X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\{0, \ldots, n\}$, *on appelle fonction génératrce la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X=k)$.

1 *Déterminer la fonction génératrice de* X *lorsque* $X \sim \mathcal{B}(p)$.
Même question lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

2 *Démontrer que deux variables aléatoires* X *et* Y *ont même loi si et seulement si* $G_X = G_Y$.

3 *Montrer que* $E(X) = G'_X(1)$ *et* $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$. *Retrouver ainsi l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.*

4 *Montrer que si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors* $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

5 *Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.*

6 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes telles que* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *et* $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.
Quelle est la loi de $Z = X+Y$ *?*

Corrigé

1 *Si* $X \sim \mathcal{B}(p)$, *on a* $G_X(x) = (1-p) + px$.
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *., on a :*

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = (1-p+px)^n.$$

2 *On a :* $G_X = G_Y$ *ssi* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, x^k = \sum_{k=0}^{m} P(Y=k)\, x^k$. *Or deux polynomes sont égaux (sur* $\mathbb{R}$*) ssi ils ont mêmes coefficients donc :*

$$G_X = G_Y \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = P(Y=k) \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}$$

3 *On a* $G'_X(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}kp_kx^{k-1}$ *et* $G''_X(x)=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)p_kx^{k-2}$. *Donc :*

$$G'_X(1)=\sum_{k=1}^{n}kp_k=E(X)$$

et

$$\begin{aligned}G''_X(1) &= \sum_{k=2}^{n}k(k-1)p_k=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)p_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}k^2p_k-\sum_{k=0}^{n}kp_k=E\left(X^2\right)-E(X)\ \text{(par théorème de transfert)}\end{aligned}$$

donc :

$$G''_X(1)+G'_X(1)-(G'_X(1))^2=E\left(X^2\right)-E(X)+E(X)-(E(X))^2=V(X)\ \text{(Huygens)}$$

Lorsque $X\sim\mathcal{B}(n,p)$, $G_X(x)=(1-p+px)^n$ *donc* $G'_X(x)=np(1-p+px)^{n-1}$ *et* $G''_X(x)=n(n-1)p^2(1-p+px)^{n-2}$ *donc* $G'_X(1)=np$ *et* $G''_X(1)=n(n-1)p^2$ *on retrouve donc :*

$$\begin{aligned}E(X) &= G'_X(1)=np\\ V(X) &= G''_X(1)+G'_X(1)-(G'_X(1))^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np-np^2=np(1-p)\end{aligned}$$

4 *Supposons* X *à valeurs dans* $[|0,n|]$ *et* Y *à valeurs dans* $[|0,m|]$. *Alors* $Z=X+Y$ *est à valeurs dans* $[|0,n+m|]$ *et pour tout* $k\in[|0,n+m|]$, *on a* $(Z=k)=\bigcup\limits_{i+j=k}(X=i,Y=j)$ *et ces événements sont 2 à 2 incompatibles donc :*

$$P(Z=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i,Y=j)=\sum_{i+j=k}P(X=i)P(Y=j)\ \text{par indépendance de } X \text{ et } Y$$

Notons $a_k=P(X=k)$, $b_k=P(Y=k)$ *et* $c_k=P(Z=k)$. *Cette relation s'écrit* $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$ *ce qui montre bien que :*

$$\sum_{k=0}^{n+m}c_kx^k=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right)$$

c'est-à dire $G_Z(x)=G_X(x)G_Y(x)$.

5 *Montrons par récurrence que si* $X_1,\ldots,X_n$ *sont* n *variables aléatoires indépendantes et si* $Z=X_1+\cdots+X_n$, *alors :*

$$G_Z(x)=\prod_{i=1}^{n}G_{X_i}(x)$$

- *I : pour* $n=2$ *c'est fait ci-dessus.*
- *H. : supposons que c'est vrai pour* $n-1$. *Alors par le lemme des coalitions, les variables* $X_1+\cdots+X_{n-1}$ *et* X_n *sont indépendantes. Donc par le cas* $n=2$:

$$G_Z(x)=G_{X_1+\cdots+X_{n-1}}(x)\,G_{X_n}(x)$$

et par l''hypothèse de récurrence, $G_{X_1+\cdots+X_{n-1}}(x)=\prod\limits_{i=1}^{n-1}G_{X_i}(x)$ *donc* $G_Z(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}G_{X_i}(x)$.

- *Ceci conclut la récurrence.*
  Avec $X_1, \ldots, X_n$ *indépendantes de même loi* $\mathcal{B}(p)$ *et* $X = X_1 + \cdots + X_n$, *on retrouve* $G_X(x) = (1-p+px)^n$.

6 *On a* $G_X(x) = (1-p+px)^n$, $G_Y(x) = (1-p+px)^m$ *donc* $G_Z(x) = (1-p+px)^{n+m}$ *et puisque la fonction génératrice détermine la loi de maière unique, on voit d'après la première question que* $Z \sim \mathcal{B}(n+m, p)$

Exercice 21 *(d'après Mines-Ponts écrit MP 2025, très détaillé). Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité* $\mathbf{P}$. *Lorsqu'on considère une variable aléatoire X définie sur Ω, son espérance est notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$.*

1 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles définies sur Ω.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $Q(t) = E\left((X+tY)^2\right)$.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Q(t) = E\left(X^2 + 2tXY + t^2Y^2\right) = E\left(Y^2\right)t^2 + 2E(XY)t + E\left(X^2\right)$$

donc Q est une fonction polynômiale, de degré au plus 2.

On a $(X-tY)^2 \geq 0$ donc $Q(t) \geq 0$ pour tout t.

- Si Q est de degré 2, alors Q étant de signe constant sur $\mathbb{R}$ n'a pas deux racines réelles distinctes. Donc $\Delta \leq 0$. Or $\Delta = 4(E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2)$. Donc :

$$E(XY) \leq |E(XY)| \leq \left(E\left(X^2\right)\right)^{1/2}\left(E\left(Y^2\right)\right)^{1/2}$$

- Si Q n'est pas de degré 2, alors $E(Y^2) = 0$. Mais $E(Y^2) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2 P(Y=y)$ est une somme nulle de termes positifs donc tous sont nuls donc si $y \neq 0$, alors $P(Y=y) = 0$. Donc Y est presque sûrement nulle (ie $P(Y \neq 0) = 0$). Donc XY aussi est presque sûrement nulle ($(XY \neq 0) \subset (Y \neq 0)$). Donc aussi $E(XY) = 0$. Donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée (et il y a égalité).
- Dans tous les cas, on a donc $E(XY) \leq (E(X^2))^{1/2}(E(Y^2))^{1/2}$.

2 On cherche à généraliser cette inégalité. On fixe pour cela deux réels $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

2a Justifier la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.

ln a pour dérivée seconde $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$, qui est négative donc ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2b Ecrire l'inégalité de concavité de la fonction ln pour des réels $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ quelconques, avec des coefficients α et β (rappeler les conditions sur α et β).

Si $\alpha, \beta \in [0,1]$ et $\alpha + \beta = 1$, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, l'inégalité de concavité de ln s'écrit :

$$\alpha \ln(a) + \beta \ln(b) \leq \ln(\alpha a + \beta b)$$

2c En déduire l'inégalité de Young :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

On peut prendre $\alpha = \dfrac{1}{p}$ et $\beta = \dfrac{1}{q}$ car $p, q \in]1, +\infty[$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donc pour tout $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{1}{p}\ln(a) + \frac{1}{q}\ln(b) \leq \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

On passe à l'exponentielle :

$$a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on prend $a = x^p$ et $b = y^q$, on a $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ donc :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2d Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles définies sur Ω. On suppose X et Y positives et $p, q \in \left]1, +\infty\right[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On souhaite démontrer l'inégalité de Hölder pour les variables aléatoires :

$$E(XY) \leq (E(X^p))^{1/p} (E(Y^q))^{1/q}$$

2di Démontrer l'inégalité de Hölder dans le cas où $E(X^p) = E(Y^q) = 1$ (indication : utiliser $2c$).

On suppose $E(X^p) = E(Y^q) = 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a d'après 2c $X(\omega) Y(\omega) \leq \frac{(X(\omega))^p}{p} + \frac{(Y(\omega))^q}{q}$.

Donc $XY \leq \frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}$. Donc par croissance et linéarité de l'espérance :

$$E(XY) \leq E\left(\frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}\right) = \frac{1}{p}E(X^p) + \frac{1}{q}E(Y^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = (E(X^p))^{1/p} (E(Y^q))^{1/q}$$

car $E(X^p) = E(Y^q) = 1$.

2dii Démontrer l'inégalité de Hölder dans le cas où $E(X^p) = 0$ ou $E(Y^q) = 0$.

Si $E(X^p) = 0$, alors X^p est presque sûrement nulle (voir plus haut) donc X aussi donc XY aussi donc $E(XY) = 0$. Donc l'inégalité est vérifiée. Idem si $E(Y^q) = 0$.

2diii Démontrer l'inégalité de Hölder dans le dernier cas (indication : se ramener au premier cas).

Le cas restant est celui où $E(X^p) > 0$ et $E(Y^q) > 0$ (car X, Y sont positives donc $E(X) \geq 0$ et $E(Y) \geq 0$).

Posons alors $X' = \frac{X}{(E(X^p))^{1/p}}$ et $Y' = \frac{Y}{(E(Y^q))^{1/q}}$.

On a $E(X'^p) = E\left(\left(\frac{X}{(E(X^p))^{1/p}}\right)^p\right) = E\left(\frac{X^p}{E(X^p)}\right) = \frac{E(X^p)}{E(X^p)} = 1$ et de même $(E(Y'^p))^{1/p} = 1$. Donc, d'après 2di, on a :

$$E(X'Y') \leq (E(X'^p))^{1/p} (E(Y'^q))^{1/q} = 1$$

Mais $E(X'Y') = E\left(\frac{X}{(E(X^p))^{1/p}} \frac{Y}{(E(Y^q))^{1/q}}\right) = \frac{1}{(E(X^p))^{1/p}} \frac{1}{(E(Y^q))^{1/q}} E(XY)$ donc :

$$E(XY) \leq (E(X^p))^{1/p} (E(Y^q))^{1/q}$$

Exo Hors-programme En une semaine, un changeur de monnaie a distribué 1000 pièces dont 50 fausses. Vous avez reçu 15 pièces de ce changeur. Donner une valeur approchée de la probabilité pour qu'au moins 3 de ces pièces soient fausses.

Soit X le nombre de fausses pièces. $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 15\}$.

Pour $k \in \{0, 1, \ldots, 15\}$ fixé, les évènements élémentaires pour lesquels $X = k$ sont obtenus en choisissant k pièces parmi 50 et $15 - k$ parmi 950. Le nombre total d'évènements élémentaires est $\binom{15}{1000}$.

Ainsi $\mathbf{P}[X = k] = \dfrac{\binom{k}{50}\binom{15-k}{950}}{\binom{15}{1000}}$ donc $\mathbf{P}[X \geq 3] = 1 - \mathbf{P}[X = 0] - \mathbf{P}[X = 1] - \mathbf{P}[X = 2] = 1 - \dfrac{\binom{0}{50}\binom{15}{950} + \binom{1}{50}\binom{14}{950} + \binom{2}{50}\binom{13}{950}}{\binom{15}{1000}}$.

X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(1000, 15, p)$ avec $p = \dfrac{50}{1000} = 5\%$.

$N = 1000 \geq 10n = 150$ donc on peut approximer cette loi par une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On peut donc donner une valeur approchée :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X \geq 3] &\simeq 1 - \binom{n}{0}p^0(1-p)^n - \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1} - \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} \\
&\simeq 1 - \left(\frac{95}{100}\right)^{15} - 15 \times \frac{5}{100} \times \left(\frac{95}{100}\right)^{14} - \frac{15 \times 14}{2} \times \frac{5^2}{100^2} \times \left(\frac{95}{100}\right)^{13}
\end{aligned}$$

Exercice 22 *Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :*

x	-4	-2	1	2	3
$P_X(x)$	$0,10$	$0,35$	$0,15$	$0,25$	$0,15$

1. *Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.*
2. *Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.*
3. *Déterminer la loi de $X^2 + X$.*

Corrigé :

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.

On a : $\forall x \in X(\Omega) = \{-4, -2, 1, 2, 3\}$, $P_X(x) \in [0, 1]$ et $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P_X(x) = 0,10 + 0,35 + 0,15 + 0,25 + 0,15 = 1$ donc $P_X(x)$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.

3. Déterminer les lois de $X^2 + X$ et de $|X|$.

Si $X = -4$, $X^2 + X = 12$.
Si $X = -2$, $X^2 + X = 2$.
Si $X = 1$, $X^2 + X = 2$.
Si $X = 2$, $X^2 + X = 6$.
Si $X = 3$, $X^2 + X = 12$.

Ainsi, $P_{X^2+X}(2) = P_X(-2) + P_X(1) = 0,35 + 0,15 = 0,5$
$P_{X^2+X}(6) = P_X(2) = 0,25$
$P_{X^2+X}(12) = P_X(-4) + P_X(3) = 0,10 + 0,15 = 0,25$

Exercice 23 *Voici les montants des lots au jeu du morpion pour* 360 000 *tickets :*

Nombre de lots	*Montant des lots*	*Nombre de lots*	*Montant des lots*
3	1000	2100	20
3	500	7533	6
3	200	51001	2
75	100	25000	1

Chaque ticket coûte un euro. Avez-vous intérêt à jouer?

Corrigé : Soit X la variable aléatoire gain de valeur le lot obtenu moins un euro (coût du ticket).

L'espérance de X est :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{x \text{ valeur de gain}} x \times \mathbf{P}[X = x] \\ &= (-1) \times \mathbf{P}[X = -1] + 0 \times \mathbf{P}[X = 0] + 1 \times \mathbf{P}[X = 1] + 5 \times \mathbf{P}[X = 5] + 19 \times \mathbf{P}[X = 19] \\ &\quad +99 \times \mathbf{P}[X = 99] + 199 \times \mathbf{P}[X = 199] + 499 \times \mathbf{P}[X = 499] + 999 \times \mathbf{P}[X = 999]\end{aligned}$$

Or $\mathbf{P}[X = -1] = \dfrac{360000 - 3 - 3 - 3 - 75 - 2100 - 7533 - 51001 - 25000}{360000} = \dfrac{274282}{360000}$ et on a donc :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{360000}(-274282 + 51001 + 5 \times 7533 + 19 \times 2100 + 99 \times 75 + 199 \times 3 + 499 \times 3 + 999 \times 3) \simeq -0,3$$

Le coût moyen à chaque essai est donc de 37 centimes d'euros.

Exercice 24 *On pose n questions à un candidat. Pour chaque question, il a une probabilité $p \in]0,1[$ de répondre correctement. Soit X le nombre de bonnes réponses fournies.*

1. *Quelle est la loi de X?*
2. *A chaque mauvaise réponse, on donne une seconde chance au candidat. Il a alors une probabilité $q \in]0,1[$ de fournir la bonne réponse. Soit Y le nombre de bonnes réponses fournies lors de ces secondes tentatives. Déterminer la loi de Y.*
   - *(a) Déterminer $\mathbf{P}(Y = j \mid X = k)$ où $0 \leq j \leq n - k$.*
   - *(b) En déduire la loi de Y.*

Corrigé :

1. Quelle est la loi de X?
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ car chaque question se déroule de façon indépendante des autres avec une probabilité p de réussite.

2. A chaque mauvaise réponse, on donne une seconde chance au candidat. Il a alors une probabilité $q \in]0,1[$ de fournir la bonne réponse. Soit Y le nombre de bonnes réponses fournies lors de ces secondes tentatives.

(a) Déterminer $\mathbf{P}(Y = j \mid X = k)$ où$0 \leq j \leq n - k$.

Sachant que X répond correctement à k questions, il reste $n-k$ questions pour-lesquelles on lui donne une seconde chance, avec pour chacune et de façon indépendante une probabilité q de réussite. Donc la loi "Y conditionnée par $X=k$" suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-k,q)$.

Donc $\mathbf{P}(Y=j \mid X=k)=\binom{n-k}{j}q^j(1-q)^{n-k-j}$

(b) En déduire la loi de Y.

On a $Y(\Omega)=\{0,1,\ldots,n\}$ et pour $j\in\{0,1,\ldots,n\}$ fixé, cherchons $P_Y(j)=\mathbf{P}(Y=j)$.

$([X=k])_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$ est le système complet d'évènements associé à X donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P_Y(j) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(Y=j\mid X=k)\,\mathbf{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n-j}\mathbf{P}(Y=j\mid X=k)\,\mathbf{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-k}{j}q^j(1-q)^{n-k-j}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=q^j(1-p)^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-k}{j}\binom{n}{k}p^k\left[(1-p)(1-q)\right]^{n-k-j} \end{aligned}$$

Or $\binom{n-k}{j}\binom{n}{k}=\dfrac{(n-k)!n!}{j!(n-k-j)!k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{j!(n-k-j)!k!}=\dfrac{n!(n-j)!}{j!(n-j)!(n-k-j)!k!}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$

donc :

$$\begin{aligned} P_Y(j) &= q^j(1-p)^j\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}p^k\left[(1-p)(1-q)\right]^{n-j-k}=(q-pq)^j\binom{n}{j}\left(p+(1-p)(1-q)\right)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j}(q-pq)^j(1-q+pq)^{n-j} \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{B}(n,q-pq)$.