D.M.9 pour le lundi 4 Mai 2026

Exercice 1 : Soit α un réel. On souhaite déterminer en fonction de α la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln(n)}$.

C'est un cas particulier de série de Bertrand.

On note f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^{\alpha}\ln(t)}$.

1 Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = 1$.

1a Calculer pour $x \geq 2$ l'intégrale $I(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ puis déterminer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

1b Déterminer la monotonie de f sur $[2, +\infty[$. En déduire que pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

1c En déduire pour tout entier $n \geq 2$ une inégalité entre $\sum_{k=2}^{n} f(k)$ et une intégrale à préciser, et conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha = 1$.

2 Dans cette question uniquement, on suppose $\alpha > 1$.

2a Déterminer un réel $\gamma > 1$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} f(n) = 0$$

2b En déduire avec soin qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$f(n) \leq \frac{1}{n^{\gamma}}$$

Conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha > 1$

3 Dans cette question uniquement, on suppose $\alpha < 1$.

3a Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f(n) \geq \frac{1}{n}$

3b En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha < 1$.

Exercice 2 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1 On prend **dans cette question uniquement** pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

1a Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme (remarquez que $n \geq 1$!!!).

1b Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer soigneusement que la série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in \left]-1, 1\right[$. (indication : utiliser une croissance comparée).

1c En remarquant que $x^n = (n+1)x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in \left]-1, 1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

1d Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que sa somme est égale à 2.

2 On prend **dans cette question uniquement** pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ et $a_1 = 0$.

2a Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$.

2b A l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.

2c Calculer $\lim_{n \to +\infty} na_n$.

2d Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n)$, en déduire un équivalent de b_n puis la nature de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$.

3 Ce résultat pourra servir dans les questions 4 et 5. Montrer que :

$$B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}.$$

4 On suppose **dans cette question uniquement** que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$.

4a Déterminer la limite de la suite (u_n).

4b En déduire que $\lim_{n \to +\infty} na_{2n} = 0$.

4c Montrer alors que $\lim_{n \to +\infty} na_n = 0$.

4d Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

4e A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

5 On suppose **dans cette question uniquement** que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

5a Vérifier que pour tous entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

5b En déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

5c Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Corrigé exercice 1 : Soit α un réel. On souhaite déterminer en fonction de α la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{n^{\alpha}\ln(n)}$.

C'est un cas particulier de série de Bertrand.

On note f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t^{\alpha}\ln(t)}$.

1 Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = 1$.

1a Calculer pour $x\geq 2$ l'intégrale $I(x)=\int_2^x f(t)\,dt$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

On a $I(x)=\int_2^x \dfrac{1}{t\ln(t)}dt=[\ln(\ln(t))]_2^x=\ln(\ln(x))-\ln(\ln(2))$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)=+\infty$

1b Déterminer la monotonie de f sur $[2,+\infty[$. En déduire que pour tout $k\geq 2$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et $\forall t\in[2,+\infty[,\ f'(t)=-\dfrac{\ln(t)+1}{t^2(\ln(t))^2}\leq 0$ donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$.

En particulier pour $k\geq 2$ et pour tout $t\in[k,k+1]$, $f(t)\leq f(k)$ donc par intégration des inégalités :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)(k+1-k)=f(k)$$

1c En déduire pour tout entier $n\geq 2$ une inégalité entre $\sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$ et une intégrale à préciser, et conclure quant à la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha=1$.

On somme cette inégalité pour $k=2,...n$:

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt=\int_2^3 f(t)\,dt+\int_3^4 f(t)\,dt+\cdots+\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

donc $\sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\geq I(n+1)$; or $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)=+\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n} f(k)=+\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} f(n)$ est divergente.

2 Dans cette question uniquement, on suppose $\alpha > 1$.

2a Déterminer un réel $\gamma>1$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} f(n)=0$$

Soit $\gamma=\dfrac{1+\alpha}{2}$, alors $n^{\gamma}f(n)=\dfrac{n^{(1+\alpha)/2}}{n^{\alpha}\ln(n)}=\dfrac{1}{n^{(\alpha-1)/2}\ln(n)}$, or $\dfrac{\alpha-1}{2}>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\gamma}f(n)=0$

2b En déduire avec soin qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$f(n) \leq \frac{1}{n^\gamma}$$

Conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha > 1$

On a $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma f(n) = 0$ et $0 < 1$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $n^\gamma f(n) \leq 1$ donc $f(n) \leq \frac{1}{n^\gamma}$. Ainsi, on a :

- A partir d'un certain rang, $f(n) \leq \frac{1}{n^\gamma}$
- La série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est convergente (série de Riemann avec $\gamma > 1$)
- $\sum f(n)$ et $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ sont des SATP (séries à termes positifs)
  donc la série $\sum f(n)$ est convergente.

3 Dans cette question uniquement, on suppose $\alpha < 1$.

3a Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f(n) \geq \frac{1}{n}$.

On a $nf(n) = \frac{n}{n^\alpha \ln(n)} = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln(n)}$ et $1-\alpha > 0$ donc par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} nf(n) = +\infty$ donc il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $nf(n) \geq 1$ donc $f(n) \geq \frac{1}{n}$.

3b En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ pour $\alpha < 1$.

On a donc :

- A partir d'un certain rang, $f(n) \geq \frac{1}{n}$
- La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente
- $\sum f(n)$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont des SATP
  donc la série $\sum f(n)$ est divergente.

Corrigé exercice 2 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1 On prend dans cette question uniquement pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

1a Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme (remarquez que $n \geq 1$!!!).

C'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$ donc c'est une série convergente et de somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \times \frac{1}{1-1/2} = 2$$

1b Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer soigneusement que la série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in \left]-1,1\right[$. (indication : utiliser une croissance comparée).

- Si $x \notin \left]-1,1\right[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |nx^{n-1}| = +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ est grossièrement divergente donc divergente.
- Si $x = 0$, la série est la série nulle et est convergente.
- Si $x \in \left]-1,1\right[$ et $x \neq 0$, on a par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} |n^3 x^{n-1}| = 0$ car $|n^3 x^{n-1}| = \dfrac{1}{|x|} n^3 |x|^n = \dfrac{1}{|x|} n^3 e^{n\ln(|x|)} = \dfrac{1}{|x|}\dfrac{n^3}{e^{-n\ln(|x|)}}$ et $-\ln(|x|) > 0$.
  Donc $|nx^{n-1}| = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ est absolument convergente donc convergente.

1c En remarquant que $x^n = (n+1)x^n - nx^n$, vérifier que si $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} x^n &= \sum_{n=1}^{N} \left((n+1)x^n - nx^n\right) = \sum_{n=1}^{N} (n+1)x^n - x\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} \\
&= \sum_{k=2}^{N+1} kx^{k-1} - x\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1} \text{ en posant } k = n+1
\end{aligned}$$

Tous les termes convergent lorsque N tend vers $+\infty$ et on obtient alors par passage à la limite :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} - x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - 1 - x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} + 1 = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Remarque : on peut calculer directement avec les sommes de séries plutôt qu'avec les sommes partielles mais il faut préciser que les sommes qui apparaissent sont toutes des sommes de séries convergentes.

1d Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et que sa somme est égale à 2.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}) = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = n\frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

D'après 1b avec $x = \dfrac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$: la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et d'après 1c, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.4 = 2$$

2 On prend dans cette question uniquement pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et $a_1 = 0$.

2a Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

On pose $f(t) = \dfrac{1}{t\ln(t)}$ pour tout $t > 0$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $t > 0$, $f'(t) = -\dfrac{1+\ln(t)}{t^2(\ln(t))^2}$ d'où les variations suvantes :

t	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow_{-0}$	

Sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$, f est décroissante et positive.

Or si $n \geq 2$, alors $n \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ donc $a_{n+1} = f(n+1) \leq a_n = f(n)$ donc $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2b A l'aide d'une comparaison à une intégrale, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge.

Pour $k \geq 2$, f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc

$$\forall t \in [k, k+1], \; \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$$

donc par intégration d'inégalités :

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \int_k^{k+1} a_k dt = a_k$$

Pour $n \geq 2$, on somme pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} a_{k+1} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \sum_{k=2}^{n} a_k$$

i.e. :

$$A_n + a_{n+1} - a_2 - a_1 \leq [\ln(\ln(t))]_2^{n+1} \leq A_n - a_1$$

et puisque $a_1 = 0$, en particulier $A_n \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ donc la série $\sum a_n$ diverge.

2c Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.

On a $na_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

2d Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n)$, en déduire un équivalent de b_n puis la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.

On a :

$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) &= (n+1)\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - n\ln(n)\\ &= \ln(n) + (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

donc $\dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$.

Or $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}$ donc par composition avec une limite fondamentale :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$ donc $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n)$.

D'autre part :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}) = n\left(\frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$$

et $(n+1)\ln(n)\ln(n+1) \sim_{+\infty} n(\ln(n))^2$ car facilement $\ln(n+1) \sim_{+\infty} \ln(n)$ donc par quotient d'équivalents : $b_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

D'après 2b, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente et $b_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et ces séries sont à termes positifs donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ est divergente.

3 montrer que $B_n = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} (k+1)a_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\\ &= a_1 - (n+1)a_{n+1} + A_{n+1} - a_1\\ &= A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}.\end{aligned}$$

4 On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$.

4a Déterminer la limite de la suite (u_n).

On a $u_n = A_{2n} - A_n$. Or la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge donc la suite (A_n) converge donc la suite (extraite) (A_{2n}) converge vers la même limite (finie!) donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4b En déduire que $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

La suite (a_n) est décroissante donc pour tout $p \in [|n+1, 2n|]$, $a_{2n} \leq a_p$ donc par somme de $p = n+1$ à $2n$, il vient :

$$\sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n} \leq \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \text{ i.e., } na_{2n} \leq u_n$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq na_{2n} \leq u_n$ donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

4c Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

On a donc aussi $\lim_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$. D'autre part :

$$0 \leq (2n+1)\, a_{2n+1} \leq (2n+1)\, a_{2n} = a_{2n} + 2na_{2n}$$

donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} (2n+1)\, a_{2n+1} = 0$.

Ainsi les deux suites extraites des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs de la suite (na_n) convergent vers la même limite (nulle) donc $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

4d Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

Par la question prélimaire,on a $B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\, a_{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} A_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Donc la série $\sum b_n$ converge

4e A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

et on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

5 On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

5a Vérifier que pour tous entiers m, n tels que $1 \leq m \leq n$, on a $B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

Par la question préliminaire, $B_n = A_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}$ donc :

$$B_n = A_m + \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - (n+1)\, a_{n+1}.$$

Or pour $k \in [|m+1, n+1|]$, $a_k \geq a_{n+1}$ car (a_n) est décroissante. Donc par sommation, $\sum\limits_{k=m+1}^{n+1} a_k \geq \sum\limits_{k=m+1}^{n+1} a_{n+1} = (n-m+1)\, a_{n+1}$.
Donc :

$$B_n \geq A_m + (n-m+1-n-1)\, a_{n+1} = A_m - m a_{n+1}.$$

5b En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.

Or pour m fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} m a_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient $A_m \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$. Donc la suite (A_m) est majorée. Or la série $\sum a_n$ est à termes positifs donc cette série est convergente.

5c Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

On peut alors appliquer le 4 et on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.