

# Programme de colles, semaines 27 et 28

## Séries numériques de réels ou de complexes

- Si la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement, alors elle diverge : à démontrer.
- Condition de convergence et somme d'une série géométrique (avec dém.)
- Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge par comparaison série-intégrale.
- Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge par comparaison avec la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ .
- Énoncé et dém du théorème sur les SATP (séries à termes positifs) équivalentes.
- Prouver la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$  et calcul de la somme.
- Montrer que la série  $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$  est convergente.
- Si  $\sum v_n$  est une SATP et si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et si la série  $\sum v_n$  est convergente, alors la série  $\sum u_n$  est convergente : énoncé et démonstration.
- Nature de la série de terme général  $u_n = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \cos \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ .
- Convergence (ou divergence) des séries de Riemann (dém.)
- Convergence absolue : définition et propriété principale (sans dém.)
- Déterminer la nature des séries de terme général  $u_n$  dans un ou plusieurs des cas suivants :  
a :  $u_n = \frac{1 + \ln(n)}{n^2}$  b :  $u_n = \frac{2^n + 5}{3^n - 12}$  c :  $u_n = n^{\ln(a)}$  d :  $u_n = e^{-\sqrt{n}}$  e :  $u_n = n^2 \sin(1/n)$   
f :  $u_n = n \sin(1/n^2)$  g :  $u_n = \left( \frac{3n}{4n-1} \right)^{2n+1}$  h :  $u_n = 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right)$  i :  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$   
j :  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$  k :  $u_n = e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ .
- Exercice : trouver un équivalent du reste  $R_n$  d'une série de Riemann convergente.

## Chapitre 13 : Ensembles finis et dénombrements - Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.

- Énoncé du théorème :  $f : E \rightarrow F$ , hypothèse sur  $E$  et  $F$  pour avoir  $f$  bijective  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots$
- Définition des  $p$ -listes. Nombre de  $p$ -listes d'un ensemble à  $n$  éléments.
- Définition des arrangements, calcul de  $A_n^p$ .
- Nombre de combinaisons de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini à  $n$  éléments, avec dém.
- Interprétation combinatoire de  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ . Idem pour la formule du triangle de Pascal.
- Exercice : déterminer le nombre de numéros de téléphone à 10 chiffres tels que :  
le numéro est formé avec deux 1, deux 3 et six 7.  
le numéro est formé avec deux chiffres distincts et deux seulement.
- Exercice : on tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

1 au plus trois cœurs.

2 exactement trois dames et au moins deux piques.