D.M.10 pour 28 Mai 2026

Problème 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considére n personnes invitées à une soirée, arrivant avec un chapeau et repartant avec un chapeau choisi au hasard à la fin de la soirée. On note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau. Enfin, on note $p_n = P(X_n = 0)$.

1a Justifier que $p_1 = 0$, $p_2 = \dfrac{1}{2}$ et $p_3 = \dfrac{1}{3}$.

1b Déterminer p_4.

1c Pour n quelconque, quel univers et quelle probabilité peuvent modéliser cette expérience aléatoire?

2 Dorénavant, on pose par convention $p_0 = 1$.

2a Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [|0, n|]\,,\ P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}$$

2b En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$

2c En déduire enfin que (p_n) est caractérisé par :

$$\left\{\begin{array}{c} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{p_{n+1-k}}{k!} \end{array}\right.$$

3a Démontrer que l'espérance de X_n est égale à 1 et interpréter ce résultat.

3b Calculer la variance de X_n.

4 On considère la suite (d_n) caractérisée par :

$$\left\{\begin{array}{c} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = d_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}\right.$$

4a Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$$

4b Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$$

4c Déduire des questions précédentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = d_n$$

5a Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

5b Montrer que (p_n) converge, on admet que sa limite vaut $\frac{1}{e}$. Interpréter ce résultat.

Problème 2 : Pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$. On rappelle que $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1a Montrer par une comparaison série-intégrale que :

$$\frac{1}{k+1} a_k(n) \leq S_k(n) \leq \frac{1}{k+1} b_k(n)$$

où l'on précisera les expressions de $a_k(n)$ et $b_k(n)$.

1b Justifier que la suite $\left(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

1c Donner un autre argument utilisant une *somme* de Riemann prouvant que $\left(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[|1, N|]$. Démontrer que $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X \geq i)$.

Soient $N, k \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[|1, N|]$. On note U_k et W_k les variables aléatoires $U_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$ et $W_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$.

3 Calculer $E(X_1)$, $E(X_1^2)$ et $V(X_1)$ en fonction de N, ceci est largement une question de cours, mais on demande de *redémontrer* les résultats.

4 Soit un entier $k \geq 2$.

4a Soit $i \in [|1, N|]$. Justifier que $P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k$.

4b Exprimer $E(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice.

4c Donner un équivalent de $E(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

5a On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[|1, N|]$. Justifier que les variables $(Y_1, \ldots, Y_N)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

5b En déduire $E(W_k)$ et $V(W_k)$ en fonction de $E(U_k)$ et $V(U_k)$.

6 On considère le couple de variables aléatoires (U_2, W_2).

6a Exprimer $U_2 + W_2$ et U_2W_2 en fonction de X_1 et X_2.

6b En déduire $E(U_2W_2)$ et $V(U_2 + W_2)$ en fonction de N.

6c Commencer le calcul de la covariance de U_2 et W_2, notée $cov(U_2, W_2)$, on admettra qu'en simplifiant on obtient $cov(U_2, W_2) = \dfrac{(N^2-1)^2}{36N^2}$.

6d Exprimer $V(U_2)$ et $V(W_2)$ en fonction de N.