

## D.M.10 pour 28 Mai 2026

**Problème 1 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $n$  personnes invitées à une soirée, arrivant avec un chapeau et repartant avec un chapeau choisi au hasard à la fin de la soirée. On note  $X_n$  la variable aléatoire indiquant le nombre  $k$  d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau. Enfin, on note  $p_n = P(X_n = 0)$ .

**1a** Justifier que  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \frac{1}{2}$  et  $p_3 = \frac{1}{3}$ .

**1b** Déterminer  $p_4$ .

**1c** Pour  $n$  quelconque, quel univers et quelle probabilité peuvent modéliser cette expérience aléatoire?

**2** Dorénavant, on pose par convention  $p_0 = 1$ .

**2a** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [0, n], P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}$$

**2b** En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$

**2c** En déduire enfin que  $(p_n)$  est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} \end{cases}$$

**3a** Démontrer que l'espérance de  $X_n$  est égale à 1 et interpréter ce résultat.

**3b** Calculer la variance de  $X_n$ .

**4** On considère la suite  $(d_n)$  caractérisée par :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

**4a** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$$

**4b** Montrer par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$$

4c Dédurre des questions précédentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = d_n$$

5a Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

5b Montrer que  $(p_n)$  converge, on admet que sa limite vaut  $\frac{1}{e}$ . Interpréter ce résultat.

**Problème 2 :** Pour tous  $k, n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k$ . On rappelle que  $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

1 Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

1a Montrer par une comparaison série-intégrale que :

$$\frac{1}{k+1} a_k(n) \leq S_k(n) \leq \frac{1}{k+1} b_k(n)$$

où l'on précisera les expressions de  $a_k(n)$  et  $b_k(n)$ .

1b Justifier que la suite  $\left( \frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{k+1}$ .

1c Donner un autre argument utilisant une *somme* de Riemann prouvant que  $\left( \frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{k+1}$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de  $\mathbb{N}$ , on note  $E(X)$  son espérance et  $V(X)$  sa variance. Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2 Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[[1, N]]$ . Démontrer que  $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X \geq i)$ .

Soient  $N, k \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur  $[[1, N]]$ . On note  $U_k$  et  $W_k$  les variables aléatoires  $U_k = \min(X_1, \dots, X_k)$  et  $W_k = \max(X_1, \dots, X_k)$ .

3 Calculer  $E(X_1)$ ,  $E(X_1^2)$  et  $V(X_1)$  en fonction de  $N$ , ceci est largement une question de cours, mais on demande de *redémontrer* les résultats.

4 Soit un entier  $k \geq 2$ .

4a Soit  $i \in [[1, N]]$ . Justifier que  $P(U_k \geq i) = \left( \frac{N-i+1}{N} \right)^k$ .

4b Exprimer  $E(U_k)$  en fonction de  $N$  à l'aide de la fonction  $S_k$  introduite au début de l'exercice.

4c Donner un équivalent de  $E(U_k)$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

5a On introduit les variables  $Y_i = N+1 - X_i$ , pour  $i$  dans  $[[1, N]]$ . Justifier que les variables  $(Y_1, \dots, Y_N)$  sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

**5b** En déduire  $E(W_k)$  et  $V(W_k)$  en fonction de  $E(U_k)$  et  $V(U_k)$ .

**6** On considère le couple de variables aléatoires  $(U_2, W_2)$ .

**6a** Exprimer  $U_2 + W_2$  et  $U_2W_2$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .

**6b** En déduire  $E(U_2W_2)$  et  $V(U_2 + W_2)$  en fonction de  $N$ .

**6c** Commencer le calcul de la covariance de  $U_2$  et  $W_2$ , notée  $cov(U_2, W_2)$ , on admettra qu'en simplifiant on obtient  $cov(U_2, W_2) = \frac{(N^2 - 1)^2}{36N^2}$ .

**6d** Exprimer  $V(U_2)$  et  $V(W_2)$  en fonction de  $N$ .

**Corrigé du problème 1 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On généralise le problème ci-dessus en considérant  $n$  personnes invitées à une soirée, arrivant avec un chapeau et repartant avec un chapeau choisi au hasard à la fin de la soirée. On note  $X_n$  la variable aléatoire indiquant le nombre  $k$  d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau. Enfin, on note  $p_n = P(X_n = 0)$ .

**1a** Justifier que  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \frac{1}{2}$  et  $p_3 = \frac{1}{3}$ .

Lorsqu'il n'y a qu'un invité, il repart avec son chapeau donc  $p_0 = 1$ .

Lorsqu'il n'y a que deux invités, de façon équiprobable soit chacun repart avec son propre chapeau, soit chacun repart avec le chapeau de l'autre invité, donc  $p_2 = \frac{1}{2}$ .

Avec trois invités, on peut noter  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  et  $(3, 2, 1)$  les événements élémentaires donnant chacun les numéros des chapeaux repris par les invités 1, 2 et 3. L'événement  $(X_3 = 0)$  correspond aux événements  $(2, 3, 1)$  et  $(3, 1, 2)$ . Il y a équiprobabilité sur cet univers de cardinal  $6 = 3!$  donc  $P(X_3 = 0) = \frac{1}{3}$  donc  $p_3 = \frac{1}{3}$ .

**1b** Déterminer  $p_4$ .

Avec une notation semblable, les issues qui réalisent l'événement  $(X_4 = 0)$  sont :  $(2, 1, 4, 3)$ ,  $(2, 3, 4, 1)$ ,  $(2, 4, 1, 3)$ ,  $(3, 4, 1, 2)$ ,  $(3, 4, 2, 1)$ ,  $(4, 1, 2, 3)$ ,  $(4, 3, 1, 2)$ ,  $(4, 3, 2, 1)$  et le cardinal de l'univers est celui des permutations de  $[[1, 4]]$  donc  $4!$  donc :

$$p_4 = \frac{9}{4!} = \frac{3}{8}$$

**1c** Pour  $n$  quelconque, quel univers et quelle probabilité modélisent cette expérience aléatoire?

On prend pour univers associé à cette expérience  $\Omega$ , ensemble des permutations de  $[[1, n]]$  et il y a équiprobabilité sur cet univers.

**2** Dorénavant, on pose par convention  $p_0 = 1$ .

**2a** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[0, n]], P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}$$

Soient  $k \in [[0, n]]$ .

- Si  $k = n$ , alors l'événement  $(X_n = n)$  est l'événement élémentaire "chaque invité repart avec son propre chapeau" donc  $P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$ , ce qui est la formule à démontrer car  $p_0 = 1$ .
- Si  $k < n$ , alors l'événement  $(X_n = k)$  est obtenu en choisissant  $k$  personnes parmi  $n$  qui repartent avec leur chapeau (il y a  $\binom{n}{k}$  façons de le faire), puis une redistribution des  $n - k$  chapeaux restants telle qu'aucun de ces chapeaux ne soit attribué à son propriétaire : le nombre de telles redistributions est  $|(X_{n-k} = 0)| = p_{n-k} (n - k)!$  car  $p_{n-k} = \frac{|(X_{n-k} = 0)|}{(n - k)!}$ .

On obtient donc :

$$P(X_n = k) = \frac{\binom{n}{k} |(X_{n-k} = 0)|}{n!} = \frac{\binom{n}{k} p_{n-k} (n - k)!}{n!} = \frac{p_{n-k}}{k!}$$

**2b** En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_n$  prend ses valeurs dans  $[[0, n]]$  donc  $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = P(\Omega) = 1$ . Donc :

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$$

On peut vérifier directement la formule pour  $n = 0$  car  $p_0 = 1$ .

**2c** En déduire enfin que  $(p_n)$  est caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} \end{array} \right.$$

On a posé  $p_0 = 1$  et pour  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1$$

donc en isolant le terme correspondant à  $k = 0$ , on a  $p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1$  donc :

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}$$

Cette relation conjuguée à la condition  $p_0 = 1$  permet de calculer par récurrence tous les termes de la suite  $(p_n)$  donc cette suite est bien caractérisée par les relations données.

**3a** Démontrer que l'espérance de  $X_n$  est égale à 1 et interpréter ce résultat.

On a :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^n kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^n kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{p_{n-k}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{p_{n-k}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-1-k}}{k!} \end{aligned}$$

donc d'après la question **2b**,  $\boxed{E(X_n) = 1}$ .

On peut interpréter ce résultat en disant qu'en moyenne, un seul des invités repart avec son propre chapeau à la fin de la soirée.

**3b** Calculer la variance de  $X_n$ .

Pour  $n = 1$ ,  $X_1$  ne prend qu'une valeur donc  $V(X_1) = 0$

Soit à présent  $n \geq 2$ .

Calculons astucieusement (ce n'est pas obligatoire, mais cela allège le calcul) l'espérance de la variable aléatoire  $X_n(X_n - 1)$  :

$$\begin{aligned} E(X_n(X_n - 1)) &= \sum_{k=0}^n (k-1)kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^n (k-1)k \frac{p_{n-k}}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{p_{n-k}}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{p_{n-2-k}}{k!} = 1 \end{aligned}$$

Donc par linéarité de l'espérance,  $E(X_n^2) = E(X_n(X_n - 1)) + E(X_n) = 1 + 1 = 2$ . Enfin d'après la formule de Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = 2 - 1 = 1$$

4 On considère la suite  $(d_n)$  caractérisée par :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

4a Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 0$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = (1 - 1)^n = 0$$

4b Montrer par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$$

Pour  $n = 0$ , la propriété à démontrer s'écrit  $d_0 = 1$  donc est vraie.

Supposons-la vraie pour un certain entier  $n$ , c'est-à-dire  $\sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} = 1$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!} &= \sum_{k=0}^n \frac{d_{n+1-k}}{k!} + \frac{d_0}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k} + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}}{k!} + \frac{d_0}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{d_{n-k}}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k+1}}{k!(n-k+1)!} + \frac{d_0}{(n+1)!} \\
 &= 1 + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k+1} + \frac{1}{(n+1)!} \\
 &= 1 + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k+1} \\
 &= 1 \text{ d'après la question précédente}
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

**4c** Dédire des questions précédentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = d_n$$

En isolant  $d_{n+1}$  (contribution de  $k = 0$ ) dans la formule précédente, on trouve  $d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}$ . Ainsi,  $(d_n)$  vérifie les relations  $d_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}$ . Or ces relations caractérisent la suite  $(p_n)$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = p_n$$

**5a** Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Récurrence sans difficulté avec la définition de la suite  $(d_n)$ .

**5b** En déduire que  $(p_n)$  converge, on admet que sa limite vaut  $\frac{1}{e}$ . Interpréter ce résultat.

Posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ , alors  $|u_n| = o_{+\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  car  $\frac{|u_n|}{1/n^2} = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc par théorème de comparaison sur les séries positives, la série  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente donc la suite  $(p_n)$  converge.

Ainsi, pour de grandes valeurs de  $n$ , la probabilité qu'aucun des invités ne retrouve son chapeau est proche de  $\frac{1}{e}$ .

**Corrigé de l'exercice 1 :** Pour tous  $k, n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k$ . On rappelle que  $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**1** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**1a** Montrer par une comparaison série-intégrale que :

$$\frac{1}{k+1} a_k(n) \leq S_k(n) \leq \frac{1}{k+1} b_k(n)$$

où l'on précisera les expressions de  $a_k(n)$  et  $b_k(n)$ .

On considère la fonction  $f(t) = t^k$  et on fixe un entier  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .  $f$  est croissante sur  $[i, i+1]$  donc pour tout  $t \in [i, i+1]$ ,  $i^k \leq t^k \leq (i+1)^k$  et par intégration d'inégalités :

$$\int_i^{i+1} i^k dt \leq \int_i^{i+1} t^k dt \leq \int_i^{i+1} (i+1)^k dt$$

$$\begin{aligned} i^k(k+1-k) &\leq \int_i^{i+1} t^k dt \leq (i+1)^k(k+1-k) \\ i^k &\leq \int_i^{i+1} t^k dt \leq (i+1)^k \end{aligned}$$

On somme l'inégalité de droite de  $i = 0$  à  $n-1$  et l'inégalité de gauche de  $i = 1$  à  $n$ , on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} t^k dt \leq \sum_{i=1}^n i^k \text{ et } \sum_{i=1}^n i^k \leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} t^k dt$$

donc par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_0^n t^k dt &\leq S_k(n) \leq \int_1^{n+1} t^k dt \\ \frac{n^{k+1}}{k+1} &= \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^n \leq S_n \leq \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1} \end{aligned}$$

d'où  $a_k(n) = n^{k+1}$  et  $b_k(n) = (n+1)^{k+1} - 1$

**1b** Justifier que la suite  $\left( \frac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{k+1}$ .

On a donc :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{S_k(n)}{n^{k+1}} \leq \frac{(1+1/n)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(1+1/n)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)n^{k+1}} \right) = \frac{1}{k+1}$  donc par théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ .

**1c** Donner un autre argument utilisant une somme de Riemann prouvant que  $\left(\frac{1}{n^{k+1}}S_k(n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{k+1}$ .

$\frac{1}{n^{k+1}}S_k(n) = \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^k$  est la somme de Riemann de la fonction  $x \mapsto x^k$  sur  $[0, 1]$  qui est continue sur ce segment donc par théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{k+1}}S_k(n) = \int_0^1 t^k dt = \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de  $\mathbb{N}$ , on note  $E(X)$  son espérance et  $V(X)$  sa variance. Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**2** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[[1, N]]$ . Démontrer que  $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X \geq i)$ .

Puisque  $X$  est à valeurs dans  $[[1, N]]$ , on remarque que pour tout  $i \geq 1$  :

$$(X \geq i) = (X = i) \cup (X \geq i + 1)$$

et les deux événements  $(X = i)$  et  $(X \geq i + 1)$  sont incompatibles donc :

$$P(X \geq i) = P(X = i) + P(X \geq i + 1)$$

donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n iP(X = i) = \sum_{i=1}^n i(P(X \geq i) - P(X \geq i + 1)) \\ &= \sum_{i=1}^n iP(X \geq i) - \sum_{i=1}^n iP(X \geq i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^n iP(X \geq i) - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)P(X \geq j) \text{ par changement d'indice } j = i + 1 \\ &= P(X \geq 1) + \sum_{j=2}^n (j - (j-1))P(X \geq j) - nP(X \geq n+1) \\ &= P(X \geq 1) + \sum_{j=2}^n P(X \geq j) \text{ car } (X \geq n+1) = \emptyset \\ &= \sum_{i=1}^n P(X \geq i) \end{aligned}$$

Soient  $N, k \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur  $[[1, N]]$ . On note  $U_k$  et  $W_k$  les variables aléatoires  $U_k = \min(X_1, \dots, X_k)$  et  $W_k = \max(X_1, \dots, X_k)$ .

**3** Exprimer  $E(X_1)$ ,  $E(X_1^2)$  et  $V(X_1)$  en fonction de  $N$ .

Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^N kP(X_1 = k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k = \frac{N+1}{2} \end{aligned}$$

et par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= \sum_{k=1}^N k^2 P(X_1 = k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} \end{aligned}$$

et par la formule de Huygens :

$$V(X) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{N^2 - 1}{12}$$

**4** Soit un entier  $k \geq 2$ .

**4a** Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Justifier que  $P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} P(U_k \geq i) &= P(\min(X_1, \dots, X_k) \geq i) \\ &= P((X_1 \geq i) \cap \dots \cap (X_k \geq i)) \\ &= P(X_1 \geq i) \times \dots \times P(X_k \geq i) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= (P(X_1 \geq i))^k \text{ car ils suivent la même loi} \\ &= \left(\sum_{j=i}^N P(X_1 = j)\right)^k = \left(\sum_{j=i}^N \frac{1}{N}\right)^k = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k. \end{aligned}$$

**4b** Exprimer  $E(U_k)$  en fonction de  $N$  à l'aide de la fonction  $S_k$  introduite au début de l'exercice.

D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned} E(U_k) &= \sum_{i=1}^N P(U_k \geq i) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k = \frac{1}{N^k} \sum_{i=1}^N (N-i+1)^k \\ &= \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^N j^k \text{ en posant } j = N-i+1 \\ &= \frac{1}{N^k} S_k(N) \end{aligned}$$

**4c** Donner un équivalent de  $E(U_k)$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

D'après la question 1, on a :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{S_k(N)}{N^{k+1}} = \frac{1}{10} \frac{1}{k+1}$  donc  $E(U_k) \sim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{k+1}$ .

**5a** On introduit les variables  $Y_i = N + 1 - X_i$ , pour  $i$  dans  $[[1, N]]$ . Justifier que les variables  $(Y_1, \dots, Y_N)$  sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

- Les variables  $X_i$  sont indépendantes. En posant  $f : x \mapsto N + 1 - x$ , on a pour tout  $i \in [[1, N]]$   $Y_i = f(X_i)$ . Donc les variables  $Y_i$  sont indépendantes.
- Pour tout  $i \in [[1, N]]$ ,  $X_i(\Omega) = [[1, N]]$  donc  $Y_i(\Omega) = f([[1, N]]) = [[1, N]]$ . De plus, pour tout  $k \in [[1, N]]$  :

$$P(Y_i = k) = P\left(X_i = \underbrace{N + 1 - k}_{\in [[1, N]]}\right) = \frac{1}{N}$$

donc  $Y_i \sim \mathcal{U}([1, N])$ .

**5b** En déduire  $E(W_k)$  et  $V(W_k)$  en fonction de  $E(U_k)$  et  $V(U_k)$ .

On a :

$$\begin{aligned} W_k &= \max(X_1, \dots, X_k) = -\min(-X_1, \dots, -X_k) \\ &= N + 1 - \min(N + 1 - X_1, \dots, N + 1 - X_k) \\ &= N + 1 - \min(Y_1, \dots, Y_k) \end{aligned}$$

donc par linéarité de l'espérance et par  $V(aX + b) = a^2V(X)$ , on a :

$$E(W_k) = N + 1 - E(\min(Y_1, \dots, Y_k)) \text{ et } V(W_k) = V(\min(Y_1, \dots, Y_k))$$

Or les  $Y_i$  suivent la même loi que les  $X_i$ , et sont indépendantes comme le sont les  $X_i$  donc le calcul de  $E(\min(Y_1, \dots, Y_k))$  et de  $V(\min(Y_1, \dots, Y_k))$  est le même que celui de  $E(U_k)$  et  $V(U_k)$  donc :

$$E(W_k) = N + 1 - E(U_k) \text{ et } V(W_k) = V(U_k)$$

**6** On considère le couple de variables aléatoires  $(U_2, W_2)$ .

**6a** Exprimer  $U_2 + W_2$  et  $U_2W_2$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .

On a :

$$U_2 + W_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$

et :

$$U_2W_2 = \min(X_1, X_2) \times \max(X_1, X_2) = X_1X_2$$

**6b** En déduire  $E(U_2W_2)$  et  $V(U_2 + W_2)$  en fonction de  $N$ .

Donc par indépendance de  $X_1$  et  $X_2$ , et en utilisant Q3, on a :

$$E(U_2W_2) = E(X_1X_2) \underset{\text{indépendance}}{=} E(X_1)E(X_2) = \frac{(N+1)^2}{4}$$

et :

$$\begin{aligned} V(U_2 + W_2) &= V(X_1 + X_2) \underset{\text{indépendance}}{=} V(X_1) + V(X_2) \\ &= \frac{N^2 - 1}{6} \end{aligned}$$

**6c** Calculer la covariance de  $U_2$  et  $W_2$ , notée  $cov(U_2, W_2)$ . La formule de Huygens pour la covariance donne :

$$\begin{aligned}
cov(U_2, W_2) &= E(U_2 W_2) - E(U_2) E(W_2) \\
&= \frac{(N+1)^2}{4} - \left( \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N j^2 \right) \left( N+1 - \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N j^2 \right) \\
&= \frac{(N+1)^2}{4} - \frac{(N+1)(2N+1)}{6N} \left( N+1 - \frac{(N+1)(2N+1)}{6N} \right) \\
&= \frac{N^2 + 2N + 1}{4} - \frac{(N+1)(2N+1)}{6N} \frac{6N^2 + 6N - 2N^2 - 3N - 1}{6N} \\
&= \frac{N^4 + 2N^3 + N^2}{4N^2} - \frac{(2N^2 + 3N + 1)(4N^2 + 3N - 1)}{6N} \\
&= \frac{9N^4 + 18N^3 + 9N^2 - 8N^4 - 18N^3 - 11N^2 + 1}{36N^2} \\
&= \frac{N^4 - 2N^2 + 1}{36N^2} = \frac{(N^2 - 1)^2}{36N^2}
\end{aligned}$$

**6d** Exprimer  $V(U_2)$  et  $V(W_2)$  en fonction de  $N$ .

Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\begin{aligned}
V(U_2 + W_2) &= V(U_2) + V(W_2) + 2cov(U_2, W_2) \\
&= 2V(U_2) + 2cov(U_2, W_2) \text{ d'après 5b}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2V(U_2) &= V(U_2 + W_2) - 2cov(U_2, W_2) \\
&= \frac{N^2 - 1}{6} - 2 \frac{(N^2 - 1)^2}{36N^2} = \frac{3N^4 - 3N^2 - (N^4 - 2N^2 + 1)}{18N^2} \\
&= \frac{2N^4 - N^2 - 1}{18N^2}
\end{aligned}$$

donc

$$V(U_2) = V(W_2) = \frac{2N^4 - N^2 - 1}{36N^2}$$