

Programme de colles, semaines 29 et 30

Espace probabilisé fini :

- Définition d'une probabilité sur un espace fini. Exemple de l'équiprobabilité.

- Probabilité d'une réunion d'événements, selon qu'ils sont incompatibles ou non. Énoncés et démonstration.

- Détermination d'une probabilité avec les images des singletons : énoncé. Application avec

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- Formule des probabilités totales, avec démonstration.

- Exercice : On lance un dé équilibré à six faces. Si le dé donne 1, on tire une carte dans un jeu de 32 cartes; si le dé donne 2 ou 3, on tire une carte dans un jeu de 52 cartes; enfin, si le dé donne 4, 5 ou 6, on choisit au hasard un des quatre rois.

Quelle est la probabilité d'obtenir le roi de trèfles?

- Formule de Bayes, avec démonstration.

- Exercice : Une maladie affecte un homme sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif?

- Exercice : Il y a deux types de jumeaux : les "vrais jumeaux" (monozygotes) et les "faux jumeaux" (dizygotes). On estime à 20% la proportion de monozygotes parmi l'ensemble des jumeaux. Par ailleurs, les grossesses gémellaires sont de deux types : bichoriale (deux placentas) pour un tiers des jumeaux monozygotes et pour tous les jumeaux dizygotes ou monochoriale (un seul placenta).

Une femme est enceinte de jumeaux, et sa grossesse est bichoriale. Calculer la probabilité qu'elle attende des "vrais jumeaux".

- Formule des probabilités composées, énoncé et démonstration.

- Exemples-types (très important) : On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . Décrire un univers Ω sur-lequel il y ait équiprobabilité et qui corresponde aux expériences aléatoires suivantes. Préciser dans chaque cas $|\Omega|$.

Exemple 1

1 On tire une boule.

2 On tire successivement n boules avec remise.

3 On tire successivement n boules sans remise.

4 On tire simultanément n boules.

- Définition des événements indépendants. Si A et B sont indépendants, alors \bar{A} et B , A et \bar{B} , \bar{A} et \bar{B} sont indépendants : démonstration.

- Événements mutuellement indépendants : définition.

- Exercice : On considère n personnes I_1, I_2, \dots, I_n . I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non" et la transmet à I_2 , puis I_2 la transmet à I_3 , etc. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p ($0 < p < 1$), et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information transmise par I_n soit celle reçue par I_1 (on établira une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}).

2. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini?

- Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour-laquelle la probabilité d'obtenir *Face* est $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois *Pile*?

2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, *Face* ne soit jamais suivi de *Pile*?

3. Quelle est la probabilité de l'évènement A : "La séquence *Pile Face* apparaît au moins une fois au cours des n lancers"?

Variabes aléatoires sur un univers fini :

- Définition d'une va, de sa loi, de sa fonction de répartition.

- Donner différentes expressions de l'espérance d'une va (réponse : $\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x) =$

$$\sum_{i=1}^n x_i P_X(x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}.$$

- Exercice : On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On effectue un tirage de n boules simultanément où $n \leq a$ et $n \leq b$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

1 : Déterminer la loi de X .

2 : Démontrer que si $n \leq a$ et $n \leq b$ alors $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$ (formule de Vandermonde).

3 : En déduire que $\mathbf{E}(X) = \frac{na}{a+b}$.

- Donner une autre démonstration de la formule de Vandermonde (la formule n'a pas à être connue).

- Définitions du moment d'ordre r , moment centré d'ordre r , de la variance et de l'écart-type, de la covariance.

- Formules de Huygens avec dém.

- Covariance de la somme avec dém.

- Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec dém.

- Variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli : définition et description de l'expérience-type.

- Idem avec la loi binomiale.

- Idem avec la loi uniforme.

- Expression de l'espérance et de la variance d'une va suivant une loi de Bernouilli, une loi binomiale, la loi uniforme (sans dem.)

- Lemme des coalitions (énoncé seulement)

- Espérance de va mutuellement indépendantes.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et X suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$

Espaces euclidiens

- Définition d'un produit scalaire (précise), inégalité de Cauchy-Schwarz (sans dém.).

- Montrer que $(f | g) = \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$.

- $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \dots$, $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \dots$, $(\vec{x} | \vec{y}) =$ en fonction de normes.

- Toute famille orthogonale sans vecteur nul est libre (dém.).

- Pythagore (généralisé à n vecteurs, avec démonstration).
 - Procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, 2)$ et $\vec{u}_3 = (1, 0, 2)$.
 - Enoncé des deux théorèmes d'orthonormalisation de Schmidt (avec et sans la condition d'unicité).
 - Question très importante: formules en BON: $(\vec{x} | \vec{y}) = \dots, \|\vec{x}\| = \dots, \vec{x} = \sum ? \vec{e}_i$, avec dém.
 - Montrer que si E est euclidien, F^\perp est un sev supplémentaire de F .
 - Question très importante: Expression d'une projection orthogonale sur un sev F muni d'une BON.
 - Question importante: application de la question précédente au calcul de la matrice d'une projection orthogonale sur une droite ou un hyperplan de E (sur un exemple donné).
 - Inégalité de Bessel avec dém.
 - Distance d'un vecteur à un sev de dim. finie : définition, théorème, corollaire et illustration sur un schéma.
 - Exposé des deux méthodes de détermination de ce projeté orthogonal.
 - Exercice : Soit p un projecteur de E euclidien. Montrer que si : $\forall \vec{x} \in E, \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$, alors p est une projection orthogonale.
 - Exercice : Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E vérifiant $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^k (\vec{x} | \vec{e}_i)^2$.
- Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ est une base orthonormale de E .