

Concours blanc PCSI1 2026

Exercice 1 : Trois questions indépendantes.

1 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A . Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On explicitera une matrice P , de passage **mais pas la matrice** P^{-1} , et on donnera la relation matricielle entre A et B .

2 Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On raisonnera par l'absurde pour les deux questions suivantes :

2a Montrer que C n'est pas semblable à une matrice scalaire (ie de la forme λI_2 , $\lambda \in \mathbb{C}$).

2b Montrer que C n'est pas semblable à une matrice diagonale. (on raisonnera sur l'application linéaire canoniquement associée à C).

3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à la fois nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et diagonalisable, c'est-à-dire telle qu'il existe une matrice inversible P vérifiant

$$P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (matrice diagonale). Montrer que } M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Exercice 2 : Analyse

Partie A : questions préliminaires. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

1 Effectuer une étude rapide et tracer la courbe représentative de la fonction f .

2 Justifier que le segment $[0, 1]$ est stable par f , c'est-à-dire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

3 Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0, 1]$.

4 Déterminer toutes les primitives de f .

5 Donner les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions f et $\arctan$.

Partie B : étude des solutions d'une équation différentielle. on considère sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2} \quad (E)$$

6 Déterminer toutes les solutions sur I de l'équation (E) .

7 Prouver que parmi toutes ces solutions, il en existe une et une seule qui soit prolongeable par continuité en 0. On appelle g cette solution unique.

8 Cette fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $g'(0)$ et déterminer la tangente et la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0^+ .

Partie C : une suite récurrente.

9 Prouver que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une et une seule solution réelle, notée α . Prouver que $0 < \alpha < 1$.

10a Vérifier que α est un point fixe de la fonction f .

10b Rappeler l'énoncé du théorème de l'*inégalité des accroissements finis* (hypothèses et conclusion).

10c Montrer que f est C -lipschitzienne sur $[0, 1]$ où C est une constante vérifiant $0 < C < 1$.

11 On définit la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1 + u_n^2}.$$

11a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

11b Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq C^n$.

11c Que peut-on en déduire ?

Partie D : dérivées successives.

12 Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

13 Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$$

Au passage, on aura établi une relation entre les polynômes P_{n+1} , P_n et P'_n .

14 Rappeler l'énoncé (complet, hypothèses comprises) du théorème établissant la formule de Leibniz.

15a Que vaut $(1 + x^2) f'(x)$? En déduire pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0.$$

15b Application : prouver que pour tout $n \geq 0$, les polynômes P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune.

16 Dans cette question, on détermine les polynômes P_n par une méthode différente.

16a Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fonction f .

16b Etablir alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}} \right).$$

16c En déduire une expression explicite de $P_n(x)$.

16d Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède exactement n racines réelles distinctes, qui sont les

$$\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} \text{ avec } 1 \leq k \leq n.$$

Partie E : une équation fonctionnelle. On cherche les fonctions h solutions du problème $(\mathcal{P})$:

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}, h(x+y)(1-h(x)h(y)) = h(x) + h(y)$$

17 Dans cette question, on suppose que h est solution de $(\mathcal{P})$.

17a Montrer $h(0) = 0$.

17b Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{h'(x)}{1+h^2(x)} = h'(0)$.

17c Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(h(x)) = ax + b$.

17d En déduire que h est constante.

18 Conclure.

Partie F : calcul de la somme d'une série. Soit la suite $S = (S_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

19a On définit deux nouvelles suites $p = (p_n)$ et $q = (q_n)$ par $p_n = S_{2n}$ et $q_n = S_{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Montrer que les suites p et q sont adjacentes.

19b Montrer que la suite S converge. On note L sa limite.

20 Soit pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}.$$

Exprimer $D_n(x)$ à l'aide de $f(x)$.

21a En calculant $\int_0^1 D_n(x) dx$ de deux façons différentes, montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

21b Conclusion ?

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On note :

$$d_n(F, G) = (\dim(F + G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 - (\dim(F))^2 - (\dim(G))^2$$

On veut prouver que :

$$\begin{cases} 0 \leq d_n(F, G) \leq \frac{n^2}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \leq d_n(F, G) \leq \frac{n^2 - 1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Partie A : étude d'exemples

1 On suppose que $F \oplus G = E$. Exprimer $d_n(F, G)$ en fonction de $\dim(F)$ et $\dim(G)$.

2 Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$. Soient $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (0, 0, 1, 1)$ et $F = Vect(\vec{u}, \vec{v})$.

2a Déterminer une base et la dimension de F .

2b Soit $G = \left\{ \vec{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \right\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et la dimension.

2c Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

2d A-t-on $d_4(A, B) < \frac{4^2}{2}$ pour tous sous-espaces vectoriels A et B de $\mathbb{R}^4$?

3 Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \{P \in E / P(0) = P'(0) = P''(0) = 0\}$ et $G = F = \{P \in E / P(1) = P'(1) = 0\}$.

3a Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , en déterminer une base et la dimension.

3b Montrer que $F \oplus G = E$.

3c Existe-t-il deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_5(A, B) = \frac{5^2 - 1}{2}$?

4 Dans cette question, $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de E . On rappelle que ce sont des sous-espaces vectoriels de E .

4a Donner sans démonstration une base et la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.

4b Déterminer $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.

4c Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}) = E$.

4d Si on note $n = \dim(E)$, vérifier que $d_n(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}))$ satisfait bien l'inégalité attendue.

Partie B : cas général. E est de nouveau quelconque, on note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = k$.

5 Montrer que $d_n(F, G) = 2(\dim(F) - \dim(F \cap G))(\dim(G) - \dim(F \cap G))$

6 En déduire que $d_n(F, G) \geq 0$.

7 A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $d_n(F, G) = 0$?

8 Montrer que $\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - n$.

9 En déduire que $d_n(F, G) \leq 2k(n - k)$.

10 En déduire que $d_n(F, G) \leq \frac{n^2}{2}$.

11 On suppose dans cette question que n est pair.

11a Montrer que $d_n(F, G) = \frac{n^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2 \dim(F) = n \end{cases}$

11b Justifier qu'il existe deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_n(A, B) = \frac{n^2}{2}$.

12 Déterminer la valeur maximale prise par d_n lorsque n est impair (on posera $n = 2p + 1$).

Problème 1 : Optimisation du choix d'une place de parking

Présentation générale : On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n ($n \in \mathbb{N}$), il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k : « la k -ième place est libre ».

Ainsi, l'expérience est modélisée par un univers Ω muni d'une probabilité P tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(A_k) = p$.

Partie 1 : dérivées de la série géométrique.

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$.

2 Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$.

4 Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Partie 2 : loi de X .

5 Vérifier que pour tout entier $n \geq s$, $P(X = n) = (1-p)^{n-s} p$

6 Montrer que la série $\sum nP(X = n)$ converge.

On pose alors $E(X) = \sum_{n=s}^{+\infty} nP(X = n)$. Calculer $E(X)$ en fonction de s et de p .

7 Montrer que la série $\sum n^2P(X = n)$ converge.

On pose alors $E(X^2) = \sum_{n=s}^{+\infty} n^2P(X = n)$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Calculer $V(X)$ en fonction de p (on constatera que $V(X)$ ne dépend pas de s).

Partie 3 : calcul de la distance moyenne à l'arrivée. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d . Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.

On admettra que la distance moyenne à l'arrivée est $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d| P(X = n)$. On admettra aussi que D_s existe.

Pour simplifier, on prend $p = \frac{1}{10}$ dans la suite de cette partie.

9 Etablir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \sum_{n=s}^d (d-n) P(X = n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) P(X = n)$.

10 Soit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geq 0$, $u_k = \sum_{i=0}^k (k-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geq 0$, $u_{k+1} = \frac{9}{10}u_k + k + 1$.

11 On pose $v_k = u_k + ak$, où a est un réel. Choisir la valeur de a de sorte que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit d'un type connu. En déduire l'expression de v_k puis de u_k en fonction de k .

12 Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s .

13 Justifier que $S_2 - S_1 = \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d) P(X = n)$. En déduire la valeur de S_2 , puis D_s .

Corrigé de l'exercice 1 : Trois questions indépendantes.

1 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A . Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On explicitera une matrice P , de passage mais pas la matrice P^{-1} , et on donnera la relation matricielle entre A et B .

On a $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{0}$. De plus, $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car ces deux vecteurs sont non colinéaires. Donc la matrice de f dans cette base est B . La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la nouvelle base est $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la relation de changement de base est $B = P^{-1}AP$.

2 Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On raisonnera par l'absurde pour les deux questions suivantes :

2a Montrer que C n'est pas semblable à une matrice scalaire (ie de la forme λI_2 , $\lambda \in \mathbb{C}$).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à C . Si C était semblable à λI_2 , alors cette matrice serait celle de f dans une certaine base, ce qui signifierait que $f = \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Mais alors, λI_2 serait la matrice de f dans toute base de $\mathbb{R}^2$, absurde car $C \neq \lambda I_2$. Donc C n'est pas semblable à une matrice scalaire.

2b Montrer que C n'est pas semblable à une matrice diagonale. (on raisonnera sur l'application linéaire canoniquement associée à C).

Supposons C semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Il existe donc une base $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{Mat}_{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Alors $f(\vec{u}_1) = \alpha \vec{u}_1$.

Notons $\vec{u}_1 = (x, y)$. Alors $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x + y = \alpha x \\ y = \alpha y \end{cases}$. Si $\alpha \neq 1$, alors $y = 0$ donc $x = \alpha x$ donc $x = 0$ donc $\vec{u}_1 = \vec{0}$. C'est absurde, donc $\alpha = 1$. Le même raisonnement donne $\beta = 1$. Donc $f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, absurde vu la matrice C canoniquement associée à f .

3 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à la fois nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et diagonalisable, c'est-à-dire telle qu'il existe une matrice inversible P vérifiant $P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ (matrice diagonale). Montrer que $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Par récurrence, on montre facilement sous ces hypothèses que pour tout entier s , $P^{-1}M^sP =$

D^s . En particulier, $D^p = (0)$. Or $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Donc $D = (0)$ donc $M = PDP^{-1} = (0)$.

Corrigé de l'exercice 2 : Analyse

Partie A : questions préliminaires. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

1 Effectuer une étude rapide et tracer la courbe représentative de la fonction f .

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$. Facilement, f est paire, croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

2 Justifier que le segment $[0, 1]$ est stable par f , c'est-à-dire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Par décroissance de f sur $[0, 1]$, $\forall t \in [0, 1], f(1) = \frac{1}{2} \leq f(t) \leq f(0) = 1$ donc $f(t) \in [0, 1]$ donc $[0, 1]$ est stable par f .

3 Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$f''(t) = \frac{-2(1+t^2)^2 + 4t(1+t^2)2t}{(1+t^2)^4} = \frac{-2(1+t^2) + 8t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{2(3t^2 - 1)}{(1+t^2)^3}$$

donc

$$f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow 3t^2 \geq 1 \Leftrightarrow t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

donc f' est décroissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$.

4 Déterminer toutes les primitives de f .

Les primitives de f sont les fonctions $\arctan + C$, $C \in \mathbb{R}$.

5 Donner les développements limités à l'ordre 5 en 0 des fonctions f et $\arctan$.

On a $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o_0(t^3)$ donc par substitution et troncature :

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + o_0(t^5)$$

puis par primitivation :

$$\arctan(t) = \arctan(0) + t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o_0(t^5) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o_0(t^5).$$

Partie B : étude des solutions d'une équation différentielle. on considère sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2} \quad (E)$$

6 Déterminer toutes les solutions sur I de l'équation (E) .

Soit $(E_0) : xy' + 2y = 0$ l'équation homogène associée. On résoud sur $]0, +\infty[$ donc $(E_0) \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = 0$.

On pose $a(x) = \frac{2}{x}$, $A(x) = \int a(x) dx = 2 \ln(x)$ donc la solution générale de (E_0) est $y(x) = \lambda e^{-2 \ln(x)} = \frac{\lambda}{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour la méthode de variation de la constante, on pose $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2}$, d'où $y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\frac{\lambda(x)}{x^3}$ et :

$$\begin{aligned} xy' + 2y &= \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow x \left(\frac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\frac{\lambda(x)}{x^3} \right) + 2\frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{x}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda'(x)}{x} &= \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

On prend $\lambda(x) = x - \arctan(x)$. Donc $y(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$ est une solution particulière de (E) et la solution générale de (E) sur I :

$$y(x) = \frac{x - \arctan(x) + \lambda}{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7 Prouver que parmi toutes ces solutions, il en existe une et une seule qui soit prolongeable par continuité en 0. On appelle g cette solution unique.

D'après 5, cette solution s'écrit :

$$y(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{5} + o_0(x^3)$$

donc n'admet une limite finie en 0 que si $\lambda = 0$. Dans ce cas, $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{5} + o_0(x^3)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ donc est prolongeable par continuité en une fonction g avec $g(0) = 0$.

8 Cette fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $g'(0)$ et déterminer la tangente et la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0^+ .

g admet alors un DL à l'ordre 1 en 0 donc est dérivable en 0 avec $g'(0) = \frac{1}{3}$. La tangente est $T_0 : y = \frac{x}{3}$.

Enfin, $g(x) - \frac{x}{3} = -\frac{x^3}{5} + o_0(x^3) \sim_0 -\frac{x^3}{5} \leq 0$ car $x \geq 0$ donc la courbe est en-dessous de sa tangente en 0 au voisinage de 0^+ .

Partie C : une suite récurrente.

9 Prouver que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une et une seule solution réelle, notée α . Prouver que $0 < \alpha < 1$.

Posons $h(x) = x^3 + x - 1$, $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc h croît strictement sur $\mathbb{R}$ et est continue donc d'après le théorème de la bijection, h induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (car $h(x) \sim_{\pm\infty} x^3$) donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution réelle. De plus, $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc $0 < \alpha < 1$.

10a Vérifier que α est un point fixe de la fonction f .

On a :

$$f(\alpha) - \alpha = \frac{1}{1 + \alpha^2} - \alpha = \frac{1 - \alpha - \alpha^3}{1 + \alpha^2} = 0$$

donc α est un point fixe de f .

10b Rappeler l'énoncé du théorème de l'inégalité des accroissements finis (hypothèses et conclusion).

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$, alors f est M -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire que pour tous $x, x' \in I$, $|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|$.

10c Montrer que f est C -lipschitzienne sur $[0, 1]$ où C est une constante vérifiant $0 < C < 1$.

Rappelons $\forall t \in [0, 1], f'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \leq 0$ et que f' est décroissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ donc pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|f'(t)| \leq \left|f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| = \frac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, f est donc C -lipschitzienne sur $[0, 1]$ avec $C = \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$.

11 On définit la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1 + u_n^2}.$$

11a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

$[0, 1]$ est stable par f et $u_0 \in [0, 1]$ donc une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

11b Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq C^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq C|u_n - \alpha|$ car $u_n, \alpha \in [0, 1]$ et f est C -lipschitzienne sur $[0, 1]$. On montre ensuite par récurrence (sans difficulté mais rédigez-la!) que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \alpha| \leq C^n |u_0 - \alpha| \leq C^n |\alpha| \leq C^n$, car $\alpha \in [0, 1]$.

11c Que peut-on en déduire ?

Puisque $0 < C < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} C^n = 0$ donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Partie D : dérivées successives.

12 Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

13 Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Au passage, on aura établi une relation entre les polynômes P_{n+1} , P_n et P'_n .

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montrera qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$:

- I.: $n = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc on pose $P_0(x) = 1$ et c'est bon.
- H. : soit $n \geq 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P'_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - (n+1) \frac{2xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{(1+x^2)P'_n(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P'_n(X) - 2(n+1)XP_n(X)$, qui est bien un polynôme comme somme, produit et dérivée de polynômes.

- C.: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

14 Rappeler l'énoncé (complet, hypothèses comprises) du théorème établissant la formule de Leibniz.

Si f et g sont n fois dérivables sur un intervalle I , alors fg aussi et pour tout $x \in I$:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

15a Que vaut $(1+x^2)f(x)$? En déduire pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0.$$

On a $(1+x^2)f(x) = 1$. Posons $f_1(x) = (1+x^2)f(x)$, f et f_1 sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n et on a $f'_1(x) = 2x$, $f''_1(x) = 2$ et pour $k \geq 3$, $f^{(k)}_1(x) = 0$ donc d'après la formule de Leibniz, pour tout $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_1^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = 0$$

donc

$$\sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} f_1^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = 0$$

donc

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + 2 \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x) = 0$$

donc

$$(1+x^2) \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + 2nx \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} + n(n-1) \frac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}} = 0$$

donc

$$\frac{P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^n} = 0$$

donc

$$P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0.$$

15b Application : prouver que pour tout $n \geq 0$, les polynômes P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune.

Supposons que β est une racine réelle commune de P_n et P_{n-1} . Alors $0 = P_n(\beta) + 2n\beta P_{n-1}(\beta) + n(n-1)(1+\beta^2)P_{n-2}(\beta) = n(n-1)(1+\beta^2)P_{n-2}(\beta)$ donc $P_{n-2}(\beta) = 0$ et donc β est racine commune de P_{n-1} et P_{n-2} donc par le même raisonnement racine de P_{n-3} et par récurrence descendante, β est racine commune de P_{n-k} et P_{n-k-1} donc in fine de P_2 et P_1 donc de P_0 . Or $P_0 = 1$ donc c'est absurde, d'où la conclusion.

16 Dans cette question, on détermine les polynômes P_n par une méthode différente.

16a Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fonction f .

On a $f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{(t-i)(t+i)} = \frac{a}{t+i} + \frac{b}{t-i}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Donc $1 = a(t-i) + b(t+i)$ et en prenant $t = i$, il vient $b = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$ et en prenant $t = -i$, il vient $a = \frac{i}{2}$ d'où :

$$f(t) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i} \right)$$

16b Etablir alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}} \right).$$

Par récurrence, on montre (vu maintes fois en TD) que la dérivée n -ième de $x \mapsto \frac{1}{x-c}$ est $x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-c)^{n+1}}$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} \right) = \frac{i(-1)^n n!}{2} \left(\frac{(x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

16c En déduire une expression explicite de $P_n(x)$.

Or pour tout n entier et x réel, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, donc $\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{n+1}} ((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1})$ donc :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} ((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1})$$

16d Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n possède exactement n racines réelles distinctes, qui sont les

$$\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} \text{ avec } 1 \leq k \leq n.$$

D'où :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 0 \Leftrightarrow ((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (x+i)^{n+1} = (x-i)^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } x=i \text{ n'est pas solution} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [0, n] \text{ tel que } \frac{x+i}{x-i} = e^{2ik\pi/(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [0, n] \text{ tel que } x+i = (x-i)e^{2ik\pi/(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [1, n] \text{ tel que } x = \frac{-i(1 + e^{2ik\pi/(n+1)})}{1 - e^{2ik\pi/(n+1)}} \end{aligned}$$

car pour $k=0$, $x+i = x-i$ est impossible et pour $k \neq 0$, $e^{2ik\pi/(n+1)} \neq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 0 \Leftrightarrow \exists k \in [1, n] \text{ tel que } x = -i \frac{e^{ik\pi/(n+1)}(e^{-ik\pi/(n+1)} + e^{ik\pi/(n+1)})}{e^{ik\pi/(n+1)}(e^{-ik\pi/(n+1)} - e^{ik\pi/(n+1)})} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [1, n] \text{ tel que } x = -i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}. \end{aligned}$$

Ce sont bien des racines réelles. Reste à prouver qu'elles sont distinctes : posons $x_k =$

$$\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

Pour $1 \leq k < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, $x_k > 0$, pour $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor < k \leq n$, $x_k < 0$, et $x_k = 0$ pour $k = \frac{n+1}{2}$ (si n est impair).

Pour $k \neq \frac{n+1}{2}$, $x_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ et $x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}$ est injective sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

(comme composée d'injections par exemple) et $\frac{k\pi}{n+1}$ est dans ces intervalles. Donc les x_k positifs (strictement) sont deux à deux distincts, les x_k (strictement) négatifs aussi, donc les x_k pris dans leur globalité le sont encore !

Partie E : une équation fonctionnelle. On cherche les fonctions h solutions du problème $(\mathcal{P})$:

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}, h(x+y)(1 - h(x)h(y)) = h(x) + h(y)$$

17 Dans cette question, on suppose que h est solution de $(\mathcal{P})$.

17a Montrer $h(0) = 0$.

Prendre $x = y = 0$ donne $h(0)(1 - (h(0))^2) = 2h(0)$. Supposons $h(0) \neq 0$, alors $1 - (h(0))^2 = 2$, absurde car $(h(0))^2 \geq 0$. Donc $h(0) = 0$.

17b Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{h'(x)}{1+h^2(x)} = h'(0)$.

Dérivons la relation $h(x+y)(1-h(x)h(y)) = h(x) + h(y)$ par rapport à x (y étant fixé, tout est dérivable car h l'est sur $\mathbb{R}$) : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$h'(x+y)(1-h(x)h(y)) + h(x+y)(-h'(x)h(y)) = h'(x)$$

puis prenons $y = -x$:

$$h'(0)(1-h(x)h(-x)) = h'(x).$$

Or prendre $y = -x$ dans la relation d'origine donne compte tenu de $h(0) = 0$, $h(-x) = -h(x)$ donc la relation ci-dessus se réécrit :

$$h'(0)(1+h^2(x)) = h'(x), \text{ i.e., } \frac{h'(x)}{1+h^2(x)} = h'(0).$$

17c Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(h(x)) = ax + b$.

En primitivant cette relation, on trouve qu'il existe une constante b telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(h(x)) = h'(0)x + b$$

17d En déduire que h est constante.

Prendre $x = 0$ donne $b = \arctan(0) = 0$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(h(x)) = h'(0)x$. Mais si $h'(0) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(h(x)) = \pm\infty$, ce qui est absurde car $\arctan$ est à valeurs dans

$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Donc $h'(0) = 0$. Donc pour tout x , $h'(x) = 0$ donc h est constante.

18 Conclure.

Or $h(0) = 0$ donc h est la fonction nulle. Enfin, réciproquement (synthèse !), la fonction nulle est évidemment solution du problème ($\mathcal{P}$), c'est donc son unique solution.

Partie F : calcul de la somme d'une série. Soit la suite $S = (S_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

19a On définit deux nouvelles suites $p = (p_n)$ et $q = (q_n)$ par $p_n = S_{2n}$ et $q_n = S_{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que les suites p et q sont adjacentes.

On a :

$$p_{n+1} - p_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+3} \leq 0$$
$$q_{n+1} - q_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+7} \geq 0$$

$$q_n - p_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{-1}{4n+3}$$

donc (p_n) est décroissante, (q_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n - p_n) = 0$ donc (p_n) et (q_n) sont adjacentes.

19b Montrer que la suite S converge. On note L sa limite.

Comme suites adjacentes, elles ont une limite commune L . Or ce sont les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de (S_n) donc (S_n) converge aussi vers L .

20 Soit pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}.$$

Exprimer $D_n(x)$ à l'aide de $f(x)$.

Par somme géométrique, puisque $-x^2 \neq 1$, $D_n(x) = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} = f(x) - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}$.

21a En calculant $\int_0^1 D_n(x) dx$ de deux façons différentes, montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

D'une part, $\int_0^1 D_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = S_n$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_n(x) dx &= \int_0^1 \left(f(x) - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 f(x) dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \\ &= [\arctan(x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

donc :

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| = \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

Or pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ donc $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$ donc $\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$ donc :

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

21b Conclusion ?

Par encadrement, il vient $L = \frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On note :

$$d_n(F, G) = (\dim(F + G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 - (\dim(F))^2 - (\dim(G))^2$$

On veut prouver que :

$$\begin{cases} 0 \leq d_n(F, G) \leq \frac{n^2}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \leq d_n(F, G) \leq \frac{n^2-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Partie A : étude d'exemples

1 On suppose que $F \oplus G = E$. Exprimer $d_n(F, G)$ en fonction de $\dim(F)$ et $\dim(G)$.

Sachant $F \oplus G = E$, on a $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ et $\dim(F \cap G) = 0$ donc :

$$d_n(F, G) = (\dim(F) + \dim(G))^2 - (\dim(F))^2 - (\dim(G))^2 = 2 \dim(F) \dim(G).$$

2 Dans cette question, $E = \mathbb{R}^4$. Soient $\vec{u} = (1, 1, 0, 0)$ et $\vec{v} = (0, 0, 1, 1)$ et $F = Vect(\vec{u}, \vec{v})$.

2a Déterminer une base et la dimension de F .

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc forment une famille libre donc une base de $F = Vect(\vec{u}, \vec{v})$, qui est donc de dimension 2.

2b Soit $G = \left\{ \vec{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \right\}$. Montrer que G est un sous-espace

vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et la dimension.

Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} X \in G &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \text{ (} L_2 - 2L_1 - L_3 \text{)} \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x + y \\ t = -2x + y \end{cases} \Leftrightarrow X = (x, y, -x + y, -2x + y) \\ &\Leftrightarrow X \in Vect((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi $G = Vect((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 1))$ donc G est un sev de $\mathbb{R}^4$.

De plus, la famille $((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 1))$ est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires donc c'est une base de G , qui est donc de dimension 2.

2c Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Montrons que la somme est directe. Soit donc $(x, y, z, t) \in F \cap G$, alors $y = x$ et $z = t$ donc aussi :

$$\begin{cases} x - x + z = 0 \\ 4x - 3x + 2z + z = 0 \\ 2x - x + z = 0 \end{cases}$$

donc $z = 0$ puis $x = 0$ puis $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. Donc $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Donc la somme $F + G$ est directe. De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

2d A-t-on $d_4(A, B) < \frac{4^2}{2}$ pour tous sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

Dans l'exemple précédent et d'après 1.), on a $d_4(F, G) = 8 = \frac{4^2}{2}$ donc l'inégalité n'est pas toujours stricte.

3 Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \{P \in E / P(0) = P'(0) = P''(0) = 0\}$ et $G = F = \{P \in E / P(1) = P'(1) = 0\}$.

3a Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , en déterminer une base et la dimension.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. D'après le théorème de caractérisation de la multiplicité des racines, on a :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow X^3 \text{ divise } P \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} / P = X^3(aX + b) \text{ car } \deg(P) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X^3, X^4) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \text{Vect}(X^3, X^4)$ donc F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. La famille (X^3, X^4) est libre car les polynômes sont non nuls de degrés distincts. Donc (X^3, X^4) est une base de F , qui est de dimension 2.

De même :

$$\begin{aligned} P \in G &\Leftrightarrow (X-1)^2 \text{ divise } P \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} / P = (X-1)^2(aX^2 + bX + c) \text{ car } \deg(P) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2) \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2)$.

De plus, la famille $((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2)$ est libre car les polynômes sont non nuls de degrés distincts. Donc c'est une base de G , qui est de dimension 3.

3b Montrer que $F \oplus G = E$.

Montrons que la somme est directe. Soit $P \in F \cap G$. Alors 0 est racine de P de multiplicité au moins 3 et 1 est racine de P de multiplicité au moins 2. Or $3 + 2 = 5 > 4 \geq \deg(P)$ donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc la somme $F + G$ est directe. De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$ donc $F \oplus G = E$.

3c Existe-t-il deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_5(A, B) = \frac{5^2 - 1}{2}$?

On a dans cet exemple et d'après 1.), on a $d_5(F, G) = 12 = \frac{5^2 - 1}{2}$.

4 Dans cette question, $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de E . On rappelle que ce sont des sous-espaces vectoriels de E .

4a Donner sans démonstration une base et la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.

Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires. La famille

$(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$ est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = 6$.

Et la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$ est une base de $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})) = 6$.

4b Déterminer $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.

On a clairement :

$$A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \text{ diagonale}$$

$$\text{donc } \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}) = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$$

4c Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}) = E$.

La famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est libre donc $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})) = 3$. Donc d'après la formule

de Grassman :

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})) &= \dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})) - \dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})) \\ &= 6 + 6 - 3 = 9 = \dim(E)\end{aligned}$$

et $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$ est évidemment un sous-espace vectoriel de E donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}) = E$.

4d Si on note $n = \dim(E)$, vérifier que $d_n(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}))$ satisfait bien l'inégalité attendue.

On a :

$$d_n(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}), \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})) = 9^2 + 3^2 - 6^2 - 6^2 = 90 - 72 = 18 \leq \frac{9^2 - 1}{2} = 40$$

l'inégalité attendue est bien vérifiée.

Partie B : cas général. E est de nouveau quelconque, on note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = k$.

5 Montrer que $d_n(F, G) = 2(\dim(F) - \dim(F \cap G))(\dim(G) - \dim(F \cap G))$.

D'après la formule de Grassman, on a :

$$\begin{aligned}d_n(F, G) &= (\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G))^2 + (\dim(F \cap G))^2 - (\dim(F))^2 - (\dim(G))^2 \\ &= 2(\dim(F \cap G))^2 - 2\dim(F)\dim(F \cap G) - 2\dim(G)\dim(F \cap G) + 2\dim(F)\dim(G) \\ &= 2(\dim(F) - \dim(F \cap G))(\dim(G) - \dim(F \cap G)).\end{aligned}$$

6 En déduire que $d_n(F, G) \geq 0$.

$F \cap G$ est un sev de F et un sev de G donc de dimension inférieure ou égale. Donc $d_n(F, G) \geq 0$.

7 A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $d_n(F, G) = 0$?

D'après la factorisation, on a :

$$\begin{aligned}d_n(F, G) &= 0 \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(F \cap G) \text{ ou } \dim(G) = \dim(F \cap G) \\ &\Leftrightarrow F = F \cap G \text{ ou } G = F \cap G \text{ car } F \cap G \text{ est un sev de } F \text{ et de } G \\ &\Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.\end{aligned}$$

8 Montrer que $\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - n$.

On a $F + G \subset E$ donc $\dim(F + G) \leq n$ donc d'après la formule de Grassman :

$$\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leq n$$

donc

$$\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - n.$$

9 En déduire que $d_n(F, G) \leq 2k(n - k)$.

On a $\dim(F) - \dim(F \cap G) \leq \dim(F) = k$ et $\dim(G) - \dim(F \cap G) \leq n - \dim(F) = n - k$ donc d'après 5 :

$$d_n(F, G) \leq 2k(n - k).$$

10 En déduire que $d_n(F, G) \leq \frac{n^2}{2}$.

Posons $\phi(t) = 2t(n - t)$. ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi'(t) = 2n - 4t$$

donc

$$\phi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{n}{2}$$

donc ϕ admet un maximum en $\frac{n}{2}$ qui vaut $\phi\left(\frac{n}{2}\right) = 2\frac{n}{2}\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$.

Donc en utilisant 9.), $d_n(F, G) \leq 2k(n-k) = \phi(k) \leq \frac{n^2}{2}$.

11 On suppose dans cette question que n est pair.

11a Montrer que $d_n(F, G) = \frac{n^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2 \dim(F) = n \end{cases}$.

- ($\Leftarrow$) Supposons $F \oplus G = E$ et $2 \dim(F) = n$. Alors aussi $\dim(G) = n - \dim(F) = \frac{n}{2}$ donc d'après 1.), on a :

$$d_n(F, G) = 2 \dim(F) \dim(G) = 2\frac{n}{2}\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

- ($\Rightarrow$) Supposons $d_n(F, G) = \frac{n^2}{2}$. Alors vu la solution de la question 10, $k = \dim(F) = \frac{n}{2}$. De plus, $d_n(F, G) = 2k(n-k)$ donc (voir questions 9 et 5), on a :

$$\begin{cases} \dim(F) - \dim(F \cap G) = \dim(F) \\ \dim(G) - \dim(F \cap G) = n - \dim(F) \end{cases}$$

donc $\dim(F \cap G) = 0$ donc $F + G = F \oplus G$ et $\dim(G) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

donc $\dim(F + G) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n = \dim(E)$ donc $F \oplus G = E$. Ainsi $\begin{cases} F \oplus G = E \\ 2 \dim(F) = n \end{cases}$.

11b Justifier qu'il existe deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_n(A, B) = \frac{n^2}{2}$.

n est pair donc $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.

Il suffit de prendre une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E puis $A = Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $B = Vect(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

Alors $A \oplus B = E$ et $2 \dim(A) = n$ donc d'après 11a.), $d_n(A, B) = \frac{n^2}{2}$.

12 Déterminer la valeur maximale prise par d_n lorsque n est impair (on posera $n = 2p + 1$).

On sait d'après 10.) que $d_n(F, G) \leq \frac{n^2}{2} = \frac{(2p+1)^2}{2} = 2p^2 + 2p + \frac{1}{2}$ mais puisque $d_n(F, G)$

est (par sa définition) un entier, on a $d_n(F, G) \leq 2p^2 + 2p = \frac{n^2 - 1}{2}$.

Montrons que cette valeur est atteinte.

Pour cela, soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E (avec $n = 2p + 1$) et prenons $A = Vect(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $B = Vect(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_{2p+1})$. Alors $\dim(A \cap B) = 0$ donc d'après 5 :

$$d_n(A, B) = 2(\dim(A) - 0)(\dim(B) - 0) = 2p(p+1) = 2p^2 + 2p = \frac{n^2 - 1}{2}$$

Donc cette valeur est atteinte, c'est le maximum de $d_n(F, G)$ pour tous les sev F et G de E .

Problème 1 : Optimisation du choix d'une place de parking

Présentation générale : On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée. Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n ($n \in \mathbb{N}$), il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k : « la k -ième place est libre ».

Ainsi, l'expérience est modélisée par un univers Ω muni d'une probabilité P tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(A_k) = p$.

Partie 1 : dérivées de la série géométrique.

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$.

- Si $|x| \geq 1$, la suite nx^{n-1} diverge donc la série $\sum nx^{n-1}$ diverge grossièrement.
- Si $|x| < 1$, alors $n|x|^{n-1} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3|x|^{n-1} = 0$.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) et ces séries sont des SATP (séries à termes positifs) donc la série $\sum nx^{n-1}$ converge absolument donc converge.

- Ainsi, la série $\sum nx^{n-1}$ converge ssi $x \in]-1, 1[$.

2 Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

donc en dérivant :

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{(1 - (n+1)x^n)(1-x) + (x - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)x^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^{n+1} = 0$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$.

- Si $|x| \geq 1$, la suite $n(n-1)x^{n-2}$ diverge donc la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ diverge grossièrement.

- Si $|x| < 1$, alors $n(n-1)x^{n-2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3(n-1)|x|^{n-2} = 0$.
La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) et ces séries sont des SATP (séries à termes positifs) donc la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge absolument donc converge.
- Ainsi, la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ converge ssi $x \in]-1, 1[$.

4 Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1)x^k &= \frac{(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n)(1-x)^2 + 2(1-x)(1 - (n+1)x^n + nx^{n+1})}{(1-x)^4} \\ &= \frac{(-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n)(1-x) + 2(1 - (n+1)x^n + nx^{n+1})}{(1-x)^3} \\ &= \frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1)x^{n-1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2-1)x^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1)x^{n+1} = 0$ donc $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Partie 2 : loi de X .

5 Vérifier que pour tout entier $n \geq s$, $P(X = n) = (1-p)^{n-s}p$

Soit $n \geq s$. On a :

$$(X = n) = \overline{A_s} \cap \overline{A_{s+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$$

Comme les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants:

$$P(X = n) = P(\overline{A_s}) P(\overline{A_{s+1}}) \dots P(\overline{A_{n-1}}) P(A_n) = (1-p)^{n-s}p$$

6 Montrer que la série $\sum nP(X = n)$ converge.

On pose alors $E(X) = \sum_{n=s}^{+\infty} nP(X = n)$. Calculer $E(X)$ en fonction de s et de p .

On a $nP(X = n) = p(1-p)^{-s+1}n(1-p)^{n-1}$. Or $p \in]0, 1[$ donc $1-p \in]-1, 1[$ donc d'après

1, la série $\sum nP(X = n)$ converge et d'après 2, on a :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=s}^{+\infty} nP(X = n) = p(1-p)^{1-s} \sum_{n=s}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \\
&= p(1-p)^{1-s} \sum_{n'=1}^{+\infty} (n' + s - 1)(1-p)^{n'+s-2} \text{ en posant } n = n' + s - 1 \\
&= p(1-p)^{1-s} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} + (s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} \right) \\
&= p \left(\frac{1}{(1-(1-p))^2} + (s-1) \frac{1}{1-(1-p)} \right) \\
&= \frac{1}{p} + s - 1.
\end{aligned}$$

7 Montrer que la série $\sum n^2 P(X = n)$ converge.

On pose alors $E(X^2) = \sum_{n=s}^{+\infty} n^2 P(X = n)$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Calculer $V(X)$ en fonction de p (on constatera que $V(X)$ ne dépend pas de s).

On a $n^2 P(X = n) = p(1-p)^{-s+2} n^2 (1-p)^{n-2} \sim_{+\infty} p(1-p)^{-s+2} n(n-1)(1-p)^{n-2}$. Or $p \in]0, 1[$ donc $1-p \in]-1, 1[$ donc d'après 3, la série $\sum n^2 P(X = n)$ converge et d'après 4, on a :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{n=s}^{+\infty} n^2 P(X = n) = p \sum_{n=s}^{+\infty} n^2 (1-p)^{n-s} \\
&= p \sum_{n'=1}^{+\infty} (n' + s - 1)^2 (1-p)^{n'-1} \text{ en posant } n = n' + s - 1 \\
&= p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + (2s-1)n + (s-1)^2) (1-p)^{n-1} \right) \\
&= p(1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p(2s-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} + p(s-1)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} \\
&= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p(2s-1) \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p(s-1)^2 \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{2s-1}{p} + (1-s)^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{2s-1}{p} + (1-s)^2 - \left(\frac{1}{p} + s - 1 \right)^2 \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{2s-1}{p} + (1-s)^2 - \frac{1}{p^2} - \frac{2(s-1)}{p} - (s-1)^2 \\
&= \frac{1-2p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

Partie 3 : calcul de la distance moyenne à l'arrivée. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d . Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.

On admettra que la distance moyenne à l'arrivée est $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty} |n - d| P(X = n)$. On admettra aussi que D_s existe.

Pour simplifier, on prend $p = \frac{1}{10}$ dans la suite de cette partie.

9 Etablir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \sum_{n=s}^d (d - n) P(X = n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d) P(X = n)$.

On a :

$$\begin{aligned} D_s &= \sum_{n=s}^{+\infty} |n - d| P(X = n) = \sum_{n=s}^d |n - d| P(X = n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} |n - d| P(X = n) \\ &= \sum_{n=s}^d (d - n) P(X = n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d) P(X = n) = S_1 + S_2 \end{aligned}$$

10 Soit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geq 0, u_k = \sum_{i=0}^k (k - i) \left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geq 0, u_{k+1} = \frac{9}{10}u_k + k + 1$.

Pour $k \geq 0$:

$$u_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k + 1 - i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = k + 1 + \sum_{i=1}^{k+1} (k + 1 - i) \left(\frac{9}{10}\right)^i$$

on pose $j = i - 1$:

$$u_{k+1} = k + 1 + \sum_{j=0}^k (k - j) \left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} = k + 1 + \frac{9}{10} \sum_{j=0}^k (k - j) \left(\frac{9}{10}\right)^j = k + 1 + \frac{9}{10}u_k$$

11 On pose $v_k = u_k + ak$, où a est un réel. Choisir la valeur de a de sorte que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit d'un type connu. En déduire l'expression de v_k puis de u_k en fonction de k .

On a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} + a(k + 1) = k + 1 + \frac{9}{10}u_k + ak + a \\ &= k + 1 + \frac{9}{10}(v_k - ak) + ak + a = \frac{9}{10}v_k + \left(1 + \frac{a}{10}\right)k + 1 + a \\ &= \frac{9}{10}v_k - 9 \text{ en prenant } a = -10 \end{aligned}$$

(v_k) est alors arithmético-géométrique, de point fixe c avec $c = \frac{9}{10}c - 9$ donc $c = -90$. Posons

$w_k = v_k + 90$. Un calcul classique (du cours) donne $w_{k+1} = \frac{9}{10}w_k$ d'où $w_k = \left(\frac{9}{10}\right)^k w_0$.

Or $u_0 = 0$ donc $v_0 = 0$ et $w_0 = 90$ donc :

$$u_k = v_k + 10k = w_k - 90 + 10k = 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k - 90 + 10k$$

- 12** Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s .
On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=s}^d (d-n) P(X=n) = \sum_{n=s}^d (d-n) \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-s} \\ &= \sum_{n=0}^{d-s} (d-s-n) \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{10} u_{d-s}. \end{aligned}$$

Donc :

$$S_1 = d - s - 9 + 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$$

- 13** Justifier que $S_2 - S_1 = \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d) P(X=n)$. En déduire la valeur de S_2 , puis D_s .
On a :

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) P(X=n) - \sum_{n=s}^d (d-n) P(X=n) \\ &= \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d) P(X=n) + \sum_{n=s}^d (n-d) P(X=n) \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} (n-d) P(X=n) \end{aligned}$$

Or $\sum_{n=s}^{+\infty} n P(X=n) = E(X) = \frac{1}{p} + s - 1$ et $\sum_{n=s}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{10} \sum_{n=s}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-s} = \frac{1}{10} \frac{1}{1-9/10} = 1$ donc :

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{p} + s - 1 - d = 9 + s - d$$

Ainsi :

$$S_2 = S_1 + 9 + s - d = 9 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$$

Enfin :

$$D_s = S_1 + S_2 = d - s + 9 + 18 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$$

Partie 4 : optimisation. On admet que pour tout $p \in]0, 1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p} (1-p)^{d-s+1}$.

- 14** Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

- 15** Etudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.

En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α avec $\alpha = d + \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$.

- 16** Dans cette question, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \frac{1}{10}$. En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0.9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place?