

D.S.1 samedi 27 Septembre 2025 (2h)

Exercice 0 : Un peu de logique

1 Traduire à l'aide de quantificateurs mathématiques :

1a La fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^*$.

1b La fonction g est constante sur $[-1, 1]$.

1c Tous les réels de $[-1, 1]$ sont de la forme $\sin(\theta)$.

2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Convertir en langage usuel :

2a $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_m$

2b $\forall n \in \mathbb{N}, ((\exists p \in \mathbb{N} / n = 2p + 1) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{N} / n^2 = 2q + 1))$.

3 Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

3a $\forall x \in [0, +\infty[, x^2 \geq x$.

3b $\forall y \in]-1, 1[, \exists x \in]-1, 1[/ y < x$.

Exercice 1 : Calculs de sommes et convergence. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1 En faisant apparaître une somme télescopique, calculer $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)(k-1)}$.

2 Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$a_1 = \pi \text{ et pour tout } n \geq 1, a_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

Montrer que pour tout $n \geq 1, a_n = n\pi$.

3a Rappeler la formule du binôme de Newton.

3b En déduire pour tout réel $x \geq 0$ et entier $n \geq 1, (1+x)^n \geq 1+nx$.

3c En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \geq 2.$$

3d Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels non nuls, simplifier le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Simplifier alors le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k}$ et en déduire à l'aide du 3b que :

$$\forall n \geq 1, 2^{n-1} n! \leq n^n$$

3e On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{k^k}$. Quel est le sens de variation de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$?

Déduire des questions précédentes que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée, puis que cette suite converge.

Exercice 2 : Des inégalités.

1 Soit t un réel dans $[0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

1a Prouver que si $x, y \in [0, 1]$, alors $x + y \leq 1 + xy$.

1b En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} \leq 2^n (1 + t^{2n})$.

1c Simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k}$.

1d Montrer alors que :

$$(1+t)^n (1+t^n) \leq 2^n (1+t^{2n})$$

2 Montrer enfin que pour tous réels positifs a et b , et entier naturel n :

$$(a+b)^n (a^n + b^n) \leq 2^n (a^{2n} + b^{2n})$$

Exercice 3 : Résolution d'équations

1 Déterminer les racines carrées de $\omega = -8 - 6i$.

2 On considère le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^3 - (4+i)X^2 + 5(1+i)X - 6(1+i)$$

2a Déterminer l'unique racine réelle de ce polynôme. On la notera r .

2b Déterminer le polynôme Q tel que $P(X) = (X-r)Q(X)$.

2c Déterminer toutes les racines de P .

Exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

Trouver deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n a + 4^n b$$

Exercice 5 : Soit un entier $n \geq 2$. Le but de cet exercice est de calculer la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)$

Pour cela, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + e^{2ik\pi/n})^n$ et $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikp\pi/n}$ où $p \in [0, n]$.

1 Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Justifier que :

$$T_{n,p} = \begin{cases} n & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{si } p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

2 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A_n = 2n$.

3 En transformant cette fois $1 + e^{2ik\pi/n}$ calculez A_n autrement, et en déduire une expression simple de C_n .

Exercice 6 (Bonus) : Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts tels que :

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Corrigé de l'exercice 0 : Un peu de logique

1 Traduire à l'aide de quantificateurs mathématiques :

1a La fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^*$.

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^* / \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x_0) \leq f(x)$$

1b La fonction g est constante sur $[-1, 1]$.

$$\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in [-1, 1], g(x) = C$$

1c Tous les réels de $[-1, 1]$ sont de la forme $\sin(\theta)$.

$$\forall x \in [-1, 1], \exists \theta \in \mathbb{R} / x = \sin(\theta)$$

2 Convertir en langage usuel :

2a $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_m$: la suite (u_n) est constante.

2b $\forall n \in \mathbb{N}, ((\exists p \in \mathbb{N} / n = 2p + 1) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{N} / n^2 = 2q + 1))$: la carré d'un entier naturel impair est impair.

3 Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

3a $\forall x \in [0, +\infty[, x^2 \geq x$: Faux, il suffit par exemple de prendre $x = \frac{1}{2}$ (ou n'importe quel $x \in [0, 1]$).

3b $\forall y \in]-1, 1[, \exists x \in]-1, 1[/ y < x$. Vrai : soit $y \in]-1, 1[$. Posons $x = \frac{1+y}{2}$. Alors $-1 < y < x < 1$ donc $x \in]-1, 1[$ et $y < x$.

Corrigé de l'exercice 1 : Calculs de sommes et convergence.

1 En faisant apparaître une somme télescopique, calculer $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)(k-1)}$.

On a pour $a, b \in \mathbb{R}$: $\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k + (a-b)}{(k+1)(k-1)}$ d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $\frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$ et il vient une somme télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

2 Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$a_1 = \pi, \text{ et pour tout } n \geq 1, a_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n = n\pi$.

Montrons ceci par récurrence forte sur $n \geq 1$:

- Initialisation.: $n = 1$, $a_1 = \pi = n\pi$, ok!
- Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que pour tout $k \in [0, n]$, $a_k = k\pi$. Alors :

$$a_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k\pi = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{2\pi}{n} \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\pi$$

- Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, $a_n = n\pi$.

3a Rappeler la formule du binôme de Newton.

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3b En déduire pour tout réel $x \geq 0$ et entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3c En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2.$$

3d Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels non nuls, simplifier le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_1}$$

Simplifier alors le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k}$ et en déduire à l'aide du 3b que :

$$\forall n \geq 1, 2^{n-1}n! \leq n^n$$

Donc :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \frac{1}{k+1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = \frac{1}{n!} \frac{n^n}{1^1} = \frac{n^n}{n!} \end{aligned}$$

Or $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ et pour tout $k \in [1, n-1]$, $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \geq 2 \geq 0$ donc (3c),

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} \geq \prod_{k=1}^{n-1} 2 = 2^{n-1} \text{ donc } \forall n \geq 1, 2^{n-1}n! \leq n^n.$$

3e On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{k^k}$. Quel est le sens de variation de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \geq 0$ donc $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Déduire des questions précédentes que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée, puis que cette suite converge.

De plus, d'après 3d, $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ donc $S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 2$ donc

$(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_{n \geq 1}$ (étant croissante et majorée), converge.

Corrigé de l'exercice 2 : Des inégalités.

1 Soit t un réel dans $[0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

1a Prouver que si $x, y \in [0, 1]$, alors $x + y \leq 1 + xy$.

Soient $x, y \in [0, 1]$. Alors $(1-x) \geq 0$ et $(1-y) \geq 0$ donc $(1-x)(1-y) \geq 0$, i.e., $1-x-y+xy \geq 0$ donc $x+y \leq 1+xy$.

1b En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} \leq 2^n (1 + t^{2n})$.

On a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (t^k + t^{2n-k})$$

Or pour tout $k \in [0, n]$, $t^k, t^{2n-k} \in [0, 1]$ donc d'après 1a, $t^k + t^{2n-k} \leq 1 + t^{2n}$ donc :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + t^{2n}) = (1 + t^{2n}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + t^{2n}) (1 + 1)^n = 2^n (1 + t^{2n})$$

1c Simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k}$.

Soit $t \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k 1^{n-k} = (1+t)^n \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2n-k} &= t^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} 1^k = t^n (1+t)^n \end{aligned}$$

1d Montrer alors que :

$$(1+t)^n (1+t^n) \leq 2^n (1+t^{2n})$$

Ainsi, en utilisant 1b et 1c, $(1+t)^n + t^n (1+t)^n \leq 2^n (1+t^{2n})$ donc $(1+t)^n (1+t^n) \leq 2^n (1+t^{2n})$.

2 Montrer enfin que pour tous réels positifs a et b , et entier naturel n :

$$(a+b)^n (a^n + b^n) \leq 2^n (a^{2n} + b^{2n})$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, distinguons 3 cas :

- $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \leq b$, alors $\frac{a}{b} \in [0, 1]$ donc d'après 1d, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right) \leq 2^n \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right)$. En multipliant par b^{2n} (qui est positif !), il vient :

$$(a+b)^n (a^n + b^n) \leq 2^n (a^{2n} + b^{2n})$$

- $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $b \leq a$, alors $\frac{b}{a} \in [0, 1]$. Même calcul en échangeant a et b , même résultat !
- $a = 0$. Alors $(a+b)^n (a^n + b^n) = b^{2n} \leq 2^n b^{2n} = 2^n (a^{2n} + b^{2n})$.
- $b = 0$. Même calcul en échangeant a et b .

Ainsi, dans tous les cas, on a :

$$(a+b)^n (a^n + b^n) \leq 2^n (a^{2n} + b^{2n})$$

Corrigé de l'exercice 3 : Résolution d'équations

1 Déterminer les racines carrées de $\omega = -8 - 6i$.

La méthode standard (à rédiger) conduit à $z^2 = \omega \Leftrightarrow \omega = \pm(1 - 3i)$.

2 On considère le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^3 - (4+i)X^2 + 5(1+i)X - 6(1+i)$$

2a Déterminer l'unique racine réelle de ce polynôme. On la notera r .

Pour $r \in \mathbb{R}$, on calcule $P(r)$ en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$P(r) = r^3 - (4+i)r^2 + 5(1+i)r - 6(1+i) = r^3 - 4r^2 + 5r - 6 + i(-r^2 + 5r - 6)$$

d'où :

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 - 4r^2 + 5r - 6 = 0 \\ -r^2 + 5r - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 - 4r^2 + 5r - 6 = 0 \\ r = 2 \text{ ou } r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow r = 3$$

car pour $r = 2$, $r^3 - 4r^2 + 5r - 6 = -4$ et pour $r = 3$, $r^3 - 4r^2 + 5r - 6 = 0$.

2b Déterminer le polynôme Q tel que $P(X) = (X - r)Q(X)$.

On pose $Q(X) = aX^2 + bX + c$ et on calcule :

$$(X - 3)Q(X) = (X - 3)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 3a)X^2 + (c - 3b)X - 3c$$

Il **suffit** donc d'avoir une solution au système suivant que l'on résout :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -(4+i) \\ c - 3b = 5(1+i) \\ -3c = -6(1+i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2(1+i) \\ b = -(4+i) + 3 = -(1+i) \\ 2(1+i) + 3(1+i) = 5(1+i) \text{ (ok!)} \end{cases}$$

d'où :

$$P(X) = (X - 3)(X^2 - (1+i)X + 2(1+i))$$

2c Déterminer toutes les racines de P .

$r = 3$ est déjà racine. Reste à résoudre $z^2 - (1+i)z + 2(1+i) = 0$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a $\Delta = (1+i)^2 - 4 \times 2(1+i) = -8 + 6i = (1-3i)^2$ d'après 1.

Donc les racines de P sont $r = 3$, $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2i$.

Corrigé de l'exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

Trouver deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n a + 4^n b$$

On considère d'abord u_0 et u_1 pour trouver a et b :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -a + 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

On procède ensuite par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer que $u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n$:

- Initialisation : Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, l'équivalence dans le système ci-dessus montre que $(-1)^n + 3 \times 4^n = u_n$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n$ et $u_{n+1} = (-1)^{n+1} + 3 \times 4^{n+1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} + 4u_n = 3((-1)^{n+1} + 3 \times 4^{n+1}) + 4((-1)^n + 3 \times 4^n) \\ &= -3(-1)^{n+2} + 4(-1)^{n+2} + 4^n(9 \times 4 + 3 \times 4) \\ &= (-1)^{n+2} + 48 \times 4^n = (-1)^{n+2} + 3 \times 4^2 \times 4^n = (-1)^{n+2} + 3 \times 4^{n+2} \end{aligned}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n$.

Corrigé de l'exercice 5 : Soit un entier $n \geq 2$. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)^n.$$

Pour cela, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + e^{2ik\pi/n})^n$ et $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikp\pi/n}$ où $p \in [0, n]$.

1 Soit $p \in [0, n]$. Justifier que :

$$T_{n,p} = \begin{cases} n & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{si } p \in [1, n-1] \end{cases}$$

Soit $p \in [1, n-1]$, on reconnaît une somme géométrique de raison $q = e^{2ip\pi/n} \neq 1$ donc :

$$T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2ip\pi/n})^k = \frac{1 - (e^{2ip\pi/n})^n}{1 - e^{2ip\pi/n}} = \frac{1 - e^{2ip\pi}}{1 - e^{2ip\pi/n}} = 0 \text{ car } e^{2ip\pi} = 1$$

Pour $p = 0$ ou $p = n$, on a $e^{2ikp\pi/n} = e^{i \times 0} = 1$ ou $e^{2ikp\pi/n} = e^{2ik\pi} = 1$ donc $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Ainsi on a bien :

$$T_{n,p} = \begin{cases} n & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{si } p \in [1, n-1] \end{cases}$$

2 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A_n = 2n$.

On a :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (1 + e^{2ik\pi/n})^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (e^{2ik\pi/n})^p 1^{n-p} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} e^{2ikp\pi/n} = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{p} e^{2ikp\pi/n} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikp\pi/n} \\
 &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} T_{n,p} = \binom{n}{0} T_{n,0} + \binom{n}{n} T_{n,n} \text{ d'après 1} \\
 &= n + n = 2n
 \end{aligned}$$

3 En transformant cette fois $1 + e^{2ik\pi/n}$ calculez A_n autrement, et en déduire une expression simple de C_n .

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (1 + e^{2ik\pi/n})^n = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ik\pi/n} (e^{-ik\pi/n} + e^{ik\pi/n}))^n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi} \left(2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)^n \\
 &= 2^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)^n = 2^n C_n
 \end{aligned}$$

d'où :

$$C_n = \frac{A_n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Corrigé de l'exercice 7 (Bonus) : Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts tels que :

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Montrons ceci par récurrence sur $n \geq 3$:

- I.: $n = 3$, il suffit de remarquer que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.
- H.: Soit $n \geq 3$. Supposons qu'il existe des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts tels que :

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{2a_3} + \dots + \frac{1}{2a_n}.
 \end{aligned}$$

Les entiers $2a_1, \dots, 2a_n$ sont deux à deux distincts. Ils sont aussi distincts de 2 car sinon l'un des a_i serait égal à 1, c'est impossible car la somme $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$ dépasserait 1. Donc les entiers $2, 2a_1, \dots, 2a_n$ sont deux à deux distincts.

- Conclusion : Pour tout $n \geq 3$, il existe des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts tels que :

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$